جامعة البعث

كلية العلوم



الجبر الخطي 2

د.عبد الباسط الخطيب

أستاذ في قسم الرياضيات

م .هناء كاظم

مشرفة على الأعمال في قسم الرياضيات

لطلاب السنة الأولى احصاء رياضي

مديرية الكتب والمطبوعات

2015 - 2016م

الفهرس

المقدمة

يعتبر موضوع الجبر الخطي من أساسيات أي منهج دراسي في تخصص الرياضيات في كل جامعات العالم المعروفة، كما أن الجبر الخطي يدخل في العديد من التخصصات الأخرى مثل العلوم الفيزيائية والكيميائية والحاسب الآلي وفروع الهندسة وعلم الاقتصاد .وقد ازدادت أهمية دراسة الجبر الخطي في السنوات الأخيرة لما شهدته هذه السنوات من تقدم مذهل في مجالات الاتصالات ومعالجة المعلومات حيث يلعب الجبر الخطي دوراً ريادياً في نظرية التشفير ....

إن فكرة المصفوفات جاءت مع محاولة البابليين والصينين في القرن الثاني والثالث قبل الميلاد لحل أنظمة بسيطة من المعادلات الخطية، أما المحددات فإنها عرفت لأول مرة في العالم سنة 1683 م في كل من اليابان وأروبا، ولقد شهد القرن التاسع عشر تطوراً كبيراً في مفاهيم الجبر الخطي على يد الكثير من علماء الرياضيات من أهمهم هاملتون وكيلي وكوشي وجروسمان ولايبنز.

وفي عام 1888 م أكمل بيانو الجهد الذي بذلوه هؤلاء العلماء وعرّف الفضاءات المتجهية المنتهية وغير المنتهية البعد بشكل موضوعي ،ومدد نوبلس المبرهنات الرئيسية للجبر الخطي على الفضاءات المتجهية على حقول كيفية ولقد سمح مفهوم التطبيق الخطي بتجاوز الحساب المصفوفي في الكثير من الحالات وقاد إلى براهين مستقلة عن اختيار القاعدة.

إن الهدف الرئيسي من هذا المقرر هو تزويد الطالب في قسم الإحصاء الرياضي بالمفاهيم الأساسية والمبرهنات للجبر الخطي واطلاعه على تطوراته وسرعة انتشار تطبيقاته.

لقد توخينا الدقة العلمية والبساطة في العرض والإكثار من الأمثلة والتمرينات المحلولة وغير المحلولة بحيث تساعد الطالب على فهم المقرر واكتساب المهارة الكافية التي تمكن الطالب من حل التمرينات بذاته ولابد هنا من الإشارة إلى أن هذا الكتاب يعد امتداداً ومكملاً لمقرر الجبر الخطي (1) لذلك لابد للطالب من دراسة الجبر الخطي (1) ليتمكن من فهم ما جاء في هذا الكتاب واستيعابه وقد تضمن هذا الكتاب الفصول التالية:

1- التطبيقات الخطية والمؤثرات الخطية.

2- كثير الحدود المميز وكثير الحدود الأصغري.

3- الفضاءات الذاتية والقيم الذاتية والتقطير.

4-: فضاءات الضرب الداخلي.

5- الأشكال الخطية والفضاءات الثنوية.

6- الأشكال ثنائية الخطية والتربيعية والهرميتية.

7- المؤثرات الخطية على الفضاءات الإقليدية والواحدية .

إننا نرجو أن نكون قد وفقنا لما سعينا إليه من توضيح المعلومات حيث كتبناها بلغة مبسطة لتصبح سهلة الفهم لدى الطالب فتحببه بالمقرر وتقربه منه.

إن تأليف هذا الكتاب على الرغم من أنه عمل جماعي ومسؤولية مشتركة وجهد متبادل إلا أن أمانة التأليف تقتضي تخصيص دور كل مؤلف على حدى، وعلى هذا الأساس فقد قام الدكتور عبد الباسط الخطيب بكتابة الفصل الأول والرابع والسادس والسابع.

في حين قامت المشرفة على الأعمال / أ. هناء كاظم / بكتابة الفصل الثاني والثالث والخامس حيث تكون قد شاركت في التأليف بنسبة 40 % والدكتور عبد الباسط بنسبة 60 %.

وفي النهاية نأمل أن يكون كتابنا هذا مساهمة متواضعة في إثراء المكتبة العربية بالكتب العلمية العربية التي هي بأمس الحاجة إليها.

والله من وراء القصد، وهو ولي التوفيق.

المؤلفان

د. عبد الباسط الخطيب و هناء كاظم

الفصل الأول

التطبيقات الخطية والمؤثرات الخطية

Linear Mappings and Linear Operations

ندرس في هذا الفصل نوعاً خاصاً وهاماً من التطبيقات بين فضاءات المتجهات، يساعدنا في معرفة متى يكون لإثنين من فضاءات المتجهات نفس الصفات الجبرية، واقتصار اختلافهما على طبيعة العناصر فقط. يسمى هذا النوع من التطبيقات بالتطبيقات الخطية والذي له أهمية كبيرة في دراسة الجبر الخطي بالإضافة إلى تطبيقاته المختلفة في الرياضيات ومواضيع أخرى مثل الفيزياء والهندسة والعلوم.

(1-1) مفاهيم أساسية للتطبيق الخطي
Basic concepts of Linear Mapping

تعريف(1−1):

ليكن V , W فضاءين متجهين على الحقل F، وليكن $f : V \to W$ تطبيقاً. نقول إن f تطبيق خطي إذا كان:

1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ لكل $u , v \in V$، ولكل $\alpha \in F$.

قبل أن نقدم أمثلة عن التطبيقات الخطية نبرهن بعض الحقائق الأساسية.

مبرهنة(1−1):

إذا كان $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً فإن:

1) $f(0) = 0$

2) $f\left(-u\right)=-f\left(u\right)$ لكل $u\in V$.

3) $f\left(u-v\right)=f\left(u\right)-f\left(v\right)$ وذلك لكل $u\,,v\in V$.

البرهان:

1) بما أن $0u=0$ من أجل أي $u\,,v\in V$، فإن

$f\left(0\right)=f\left(0\,u\right)=0\,f\left(u\right)=0$.

2) $f\left(-u\right)=f\left(\left(-1\right)u\right)=\left(-1\right)f\left(u\right)=-f\left(u\right)$

3) $f\left(u-v\right)=f\left(u+\left(-v\right)\right)=f\left(u\right)+f\left(-v\right)=f\left(u\right)-f\left(v\right)$

وذلك مهما يكن $u\,,v\in V$.

إن المبرهنة الآتية تبين لنا بأنه يمكن دمج الشرطين السابقين الواردين في تعريف التطبيق الخطي بشرط واحد فقط.

مبرهنة(1−1):

يكون $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً إذا وفقط إذا كان $f\left(\alpha\,u+\beta\,v\right)=\alpha\,f\left(u\right)+\beta\,f\left(v\right)$، وذلك مهما يكن $u\,,v\in V$، $\alpha\,,\,\beta\in F$.

البرهان:

نفرض أن f تطبيق خطي، ومن ثمّ فإن:

$$f\left(\alpha\,u+\beta\,v\right)=f\left(\alpha\,u\right)+f\left(\beta\,v\right)=\alpha\,f\left(u\right)+\beta\,f\left(v\right)$$

ولبرهان العكس نفرض أن $f\left(\alpha\,u+\beta\,v\right)=\alpha\,f\left(u\right)+\beta\,f\left(v\right)$، لكل $u\,,v\in V$ و $\alpha\,,\,\beta\in F$، بشكل خاص إذا كان $\alpha=\beta=1$.

عندئـــــــــذ $f(v)+f(u)=f(u+v)$، وإذا كــــــــان $\beta=0$. فـــــــــإن $f(\alpha u)=\alpha f(u)$. إذاً f تطبيق خطي.

وباستخدام الاستقراء الرياضي والمبرهنة (1−1) نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة(1−1):

إذا كان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، فإن:

$$f\left(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+...+\alpha_n u_n\right)=\alpha_1 f(u_1)+\alpha_2 f(u_2)+...+\alpha_n f(u_n)$$

وذلك مهما يكن $u_1,u_2,...,u_n\in V$، $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$.

(2−1)أمثلة

Examples

مثال(2−1):

ليكن $V\ ,\ W$ فضاءين متجهين. عندئذ من السهل التحقق من أن التطبيقات الآتية هي تطبيقات خطية:

a) التطبيق المطابق $I:V\to V$ والمعرف بالشكل:

$$I(v)=v\ ,\ \forall\ v\in V$$

b) التطبيق الصفري $0:V\to W$ والمعرف بالقاعدة:

$$0(v)=0\ ,\ \forall\ v\in V$$

c) الضرب بعدد $\alpha\in F$ وهو $f_\alpha:V\to V$ والمعرف بالقاعدة:

$$f_\alpha(v)=\alpha v\ ,\ \forall\ v\in V$$

مثال(2−2):

ليكن $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة:

$$f(x,y,z)=(x-z,y+z) \quad \text{لكل} \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

برهن أن f تطبيق خطي.

الحل:

لنفرض أن $u=(x_1,y_1,z_1)\ ,v=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$، وأن $\alpha\in F$. عندئذ:

(1

$$\begin{aligned} f(u+v)&=f\left[(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\right] \\ &=f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \\ &=((x_1+x_2)-(z_1+z_2),(y_1+y_2)+(z_1+z_2)) \\ &=(x_1-z_1,y_1+z_1)+(x_2-z_2,y_2+z_2) \\ &=f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2) \\ &=f(u)+f(v) \end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned} f(\alpha u)&=f\left[(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)\right] \\ &=(\alpha x_1-\alpha z_1,\alpha y_1+\alpha z_1) \\ &=(\alpha(x_1-z_1),\alpha(y_1+z_1)) \\ &=\alpha(x_1-z_1,y_1+z_1) \\ &=\alpha f(u) \end{aligned}$$

إذاً تطبيق خطي.

مثال(2−3):

إن التطبيق $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة:

$$f(x,y)=(y,x+y,x),\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

تطبيق خطي.

الحل:

لنفرض أن $u=(x_1,y_1),\ v=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$، وأن $\alpha\in F$. عندئذ:

(1

$$\begin{aligned} f(u+v)&=f\left[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right]\\ &=f(x_1+x_2,y_1+y_2)\\ &=(y_1+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2,x_1+x_2)\\ &=(y_1,y_1+x_1,x_1)+(y_2,y_2+x_2,x_2)\\ &=f(u)+f(v)\end{aligned}$$

ويكون:

(2

$$\begin{aligned} f(\alpha u)&=f\left[(\alpha x_1,\alpha y_1)\right]\\ &=(\alpha y_1,\alpha y_1+\alpha x_1,\alpha x_1)\\ &=\alpha(y_1,y_1+x_1,x_1)\\ &=\alpha f(x_1,y_1)\\ &=\alpha f(u)\end{aligned}$$

إذاً f تطبيق خطي.

مثال(2−4):

إن التطبيق $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة:

$$f(x,y)=(x,y+1),\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

لا يشكل تطبيقاً خطياً، لأنه إذا كان $u=(1,2),v=(2,3)\in\mathbb{R}^2$، يكون:

$$f(u+v)=f(3,5)=(3,5-1)=(3,4)$$

ولكن:

$$\begin{aligned}f(u)+f(v)&=f(1,2)+f(2,3)\\&=(1,1)+(2,2)=(3,3)\end{aligned}$$

وبالتالي $f(u+v)\neq f(u)+f(v)$.

مثال(2−5):

ليكن التطبيـق $f:M_{(m,n)}(F)\to M_{(n,m)}(F)$ والمعرف بالقاعدة $f(A)=A^t$، لكل $A\in M_{(m,n)}(F)$. أثبت أن f تطبيق خطي.

الحل:

لنفرض أن $A,B\in M_{(m,n)}(F)$ ، وأن $\alpha\in F$. عندئذ:

1) $f(A+B)=(A+B)^t=A^t+B^t=f(A)+f(B)$

2) $f(\alpha A)=(\alpha A)^t=\alpha A^t=\alpha f(A)$

مثال(2−6):

إن التطبيق $f:P_n\to P_{n-1}$، حيث P_n فضـاء كثيرات الحدود التـي درجتها أصغر أو تساوي n، و P_{n-1} فضـاء كثيرات الحدود التي درجتها أصـغر أو تسـاوي$n-1$، والمعرف

بالقاعدة $f\left(g\left(x\right)\right)=g'\left(x\right)$، لكل $g\left(x\right)\in P_n$ هو تطبيق خطي،وكذلك التطبيق $f:P_n\to P_{n-1}$ والمعرف بالقاعدة $f\left(g\left(x\right)\right)=\int_0^x g\left(t\right)dt$، لكل $g\left(x\right)\in P_n$ تطبيق خطي أيضاً.

الحل: يترك للطالب.

مثال(2−7):

التطبيق $f:M_{(2,3)}\left(F\right)\to P_2$ والمعرف بالقاعدة:

$$f\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right)=\left(a_{11}+a_{13}\right)x^2+\left(a_{21}-a_{22}\right)x+a_{23}$$

تطبيق خطي.

الحل:

بفرض $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$، و $\alpha\in F$، فإن:

(1

$$f\left(A+B\right)=f\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\left(a_{11}+b_{11}\right)+\left(a_{13}+b_{13}\right)\right]x^2+$$

$$+\left[\left(a_{21}+b_{21}\right)-\left(a_{22}+b_{22}\right)\right]x+\left[a_{23}+b_{23}\right]$$

ومنه:

$$f(A+B)=\left[\left(a_{11}+a_{13}\right)x^{2}+\left(a_{21}-a_{22}\right)x+a_{23}\right]+$$
$$+\left[\left(b_{11}+b_{13}\right)x^{2}+\left(b_{21}-b_{22}\right)x+b_{23}\right]=f(A)+f(B),$$

أي أن: $$f(A+B)=f(A)+f(B)$$

(2

$$\begin{aligned}f(\alpha A)&=f\left(\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23}\end{bmatrix}\right)\\ &=\left(\alpha a_{11}+\alpha a_{13}\right)x^{2}+\left(\alpha a_{21}-\alpha a_{22}\right)x+\alpha a_{23}\\ &=\alpha\left[\left(a_{11}+a_{13}\right)x^{2}+\left(a_{21}-a_{22}\right)x+a_{23}\right]\\ &=\alpha f(A)\end{aligned}$$

إذاً f تطبيق خطي.

مثال(8−2):

ليكن $f:\mathbb{R}^{3}\rightarrow\mathbb{R}^{2}$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $f(x,y,z)=(|x|,0)$. بين أن f ليس خطياً.

الحل:

ليكن $v=(1,2,3)$, $k=-3$. عندئذ $kv=(-3,-6,-9)$، وبما أن $f(v)=(1,0)$ فإن $kf(v)=-3(1,0)=(-3,0)$، وبالتالي:

$$f(kv)=f(-3,-6,-9)=(3,0)\neq kf(v)=(-3,0)$$

هذا يعني أن f ليس خطياً.

إن المثالين الآتيين يتعلقان بالفضاء المتجهي V للمصفوفات المربعة من المرتبة n على الحقل Fومصفوفة اختيارية B في V، حيث $V = M_{(n,n)}(F)$.

مثال(2−9):

ليكن $f : V \to V$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $f(A) = AB + BA ; \forall A \in V$.أثبت أن f خطي.

الحل:

لدينا من أجل أي $A_1, A_2 \in V$، و$k \in F$

(1

$$\begin{aligned} f(A_1 + A_2) &= (A_1 + A_2)B + B(A_1 + A_2) \\ &= A_1B + A_2B + BA_1 + BA_2 \\ &= (A_1B + BA_1) + (A_2B_1 + BA_2) \\ &= f(A_1) + f(A_2) \end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned} f(kA_1) &= (kA_1)B + B(kA_1) \\ &= k(A_1B) + k(BA_1) \\ &= k(A_1B + BA_1) = k\,f(A_1) \end{aligned}$$

مثال(2−10):

ليكن $f : V \to V$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $f(A) = B + A$، حيث $A \in V$. عندئذ بين أن f يكون خطياً إذا وفقط إذا كان $B = 0$.

الحل:

إذا كـان $B=0$. عندئـذ $f(A)=A$ ، أي أن f هـو التطبيـق المطـابق، وبالتاليفـإن f تطبيق خطي. ومن جهة أخرى، لنفرض أن $B\neq 0$ فإن $f(0)=B+0=B\neq 0$ وبذلك لا يمكن أن يكون f خطياً.

إن المثالين الآتيين يتعلقان بالتطبيق المرافق $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ على الحقل العقدي $\mathbb{C}$ ، أي أن $f(z)=\bar{z}$ ، حيث $z\in\mathbb{C}$ ، أو، $f(a+bi)=a-bi$ ، حيث $a,b\in\mathbb{R}$.

مثال(2−11):

بفرض أن $\mathbb{C}$ فضاء متجهي على نفسه، عندئذ f تطبيق غير خطي.

الحل:

لـــيكن $u=2+3i$, $k=1-i$ ، ومنـــه $ku=(1-i)(2+3i)=5+i$ ، و $f(ku)=5-i$ ولكن:

$$kf(u)=(1-i)(2-3i)=-1-5i\neq f(ku)$$

وبالتالي f غير خطي.

مثال(2−12):

بفرض أن $\mathbb{C}$ فضاء متجهي على الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$ ، فإن f تطبيقٌ خطيٌ.

الحل: يترك للطالب.

(3–1) خواص التطبيقات الخطية

Properties of Linear Mappings

سنقوم بتطوير بعض الخواص الأساسية للتطبيقات الخطية،وبصفة خاصة سنثبت بأنه إذا كان لدينا صور متجهات الأساس لتأثير تطبيق خطي، عندئذ يصبح ممكناً إيجاد صور بقية المتجهات في الفضاء المتجهي.

مبرهنة(3–1):

ليكن $f : V \to U$ تطبيقاً خطياً،وليكن W فضاءً جزئياً من الفضاء المتجهي V على الحقل F، و W_1 فضاءً جزئياً من الفضاء المتجهي Uعلى الحقل Fعندئذ:

1) الصورة المباشرة للفضاء الجزئي W هو فضاء جزئي من U.

2) الصورة العكسية للفضاء الجزئي W_1 هو فضاء جزئي من V.

البرهان:

1)بما أن $f(W)=\{f(v) : v \in W\}$،وبالتالي مهما تكن $u_1,u_2 \in f(W)$فإنه يوجد $v_1,v_2 \in V$، بحيث يكون $f(v_1)=u_1 \ , f(v_2)=u_2$،ومهما تكن $\alpha,\beta \in F$. عندئذ يكون:

$$\alpha u_1+\beta u_2=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)=f(\alpha v_1)+f(\beta v_2)=f(\alpha v_1+\beta v_2).$$

بما أن $\alpha v_1+\beta v_2 \in W$ (لأن W فضاء جزئي من V)، فإن $f(\alpha v_1+\beta v_2)\in f(W)$. هذا يعني أن $f(W)$ فضاء جزئي من الفضاء U.

2) لدينا $f^{-1}(W_1)=\{v \in V \ ; f(v)\in W_1\}$. الآن، مهما يكن $v_1,v_2 \in f^{-1}(W_1)$ و $\alpha,\beta \in F$ فإن $f(v_1),f(v_2)\in W_1$، كما أن:

$$\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)\in W_1.$$

وذلك لأن W_1 فضاء جزئي من U. بما أن:

$$\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)=f(\alpha v_1)+f(\beta v_2)=f(\alpha v_1+\beta v_2)\in W_1,$$

فإن $\alpha v_1+\beta v_2\in f^{-1}(W_1)$، هذا يعني أن $f^{-1}(W_1)$ فضاء جزئي من V.

مبرهنة(3−2):

بفرض أن $g:W\to U$ ،$f:V\to W$ تطبيقان خطيان، فإن التطبيق $g\circ f:V\to U$ خطيأيضاً.

البرهان:

من أجل أي متجهين $v_1,v_2\in V$ و$\alpha,\beta\in F$ يكون:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\alpha v_1+\beta v_2)&=g\left(f(\alpha v_1+\beta v_2)\right)=g\left(\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)\right)\\&=\alpha\, g\left(f(v_1)\right)+\beta\, g\left(f(v_2)\right)\\&=\alpha(g\circ f)(v_1)+\beta(g\circ f)(v_2).\end{aligned}$$

وبذلك يكون $g\circ f$ تطبيقاً خطياً.

مبرهنة(3−3):

ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً،ولنفرض أن $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$وأن $f(v_1),f(v_2),\ldots,f(v_n)$ مستقلة خطياً. عندئذ تكون المتجهات $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مستقلة خطياً أيضاً.

البرهان:

نفرض أن:

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n=0$$

حيث $\alpha_i \in F$ ، $i = 1, 2, ..., n$ ، وبالتالي فإن:

$$f\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n\right) = f\left(0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 f\left(v_1\right) + \alpha_2 f\left(v_2\right) + ... + \alpha_n f\left(v_n\right) = 0$$

وبما أن $f\left(v_i\right)$ مستقلة خطياً، $i = 1, 2, ..., n$ ، فإن $\alpha_i = 0$ ، حيث $i = 1, 2, ..., n$.
هذا يعني أن المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ مستقلة خطياً.

نفرض الآن أن $f : V \to W$ تطبيق خطي وأن $v \in V$. السؤال لآن، كيف نعين $f\left(v\right)$؟

إذا كان $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساساً للفضاء V، فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ ، بحيث يكون $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ ، ولذلك،حسب النتيجة (1−1)، نجد أن:

$$f\left(v\right) = \alpha_1 f\left(v_1\right) + \alpha_2 f\left(v_2\right) + ... + \alpha_n f\left(v_n\right)$$

وبالتالي بمجرد معرفتنا لتأثير f على عناصر الأساس S نستطيع تعيين $f\left(v\right)$ مهما يكن $v \in V$. ولمعالجة المسألة المعاكسة، بفرض V, W فضاءان متجهيان، حيث $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساساً للفضاء V و $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ مجموعة جزئية من W. فإن المبرهنة الآتية تضمن لنا وجود تطبيق خطي وحيد $f : V \to W$ ، بحيث يكون $f\left(v_i\right) = w_i$ لكل $1 \le i \le n$.

مبرهنة(3−4):

ليكن V , W فضاءين متجهين فاذا كان $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساساً للفضاء V، و $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ مجموعة من المتجهات في W، فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f : V \to W$ بحيث يكون $f\left(v_i\right) = w_i$ لكل $1 \le i \le n$.

البرهان:

نثبت هذه المبرهنة بثلاث خطوات.

(1) نعرف التطبيق $f:V\to W$، بحيث $f(v_i)=w_i$ من أجل $1\le i\le n$.

(2) نبين أن f تطبيق خطي.

(3) نبين أن f وحيد.

(1) ليكن $v\in V$، عندئذ توجد أعداد وحيدة $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in F$، بحيث إن:

$$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n$$

نفرض الآن أن $f:V\to W$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة:

$$f(v)=f(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\dots+\alpha_nw_n$$

(بما أن α_i اعداد وحيدة. فإن التطبيق معرف جيداً). بما أن $v_i=0v_1+\dots+1v_i+\dots+0v_n$، $i=1,2,\dots,n$، وبالتالي $f(v_i)=0w_1+\dots+1w_i+\dots+0w_n=w_i$.

(2)نبرهن الآن أن f تطبيق خطي ولهذا الغرض نفرض أن:

$$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n\ ,u=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\dots+\beta_nv_n\,.$$

و $\alpha_i,\beta_i\in F$. عندئذ:

$$\begin{aligned}f(u+v)&=f\left[(\alpha_1+\beta_1)v_1+\dots+(\alpha_n+\beta_n)v_n\right]\\&=(\alpha_1+\beta_1)w_1+\dots+(\alpha_n+\beta_n)w_n\\&=(\alpha_1w_1+\dots+\alpha_nw_n)+(\beta_1w_1+\dots+\beta_nw_n)\\&=f(v)+f(u)\end{aligned}$$

$$f(\alpha v)=f(\alpha\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha\alpha_n v_n)$$
$$=\alpha\alpha_1 w_1+\ldots+\alpha\alpha_n w_n$$
$$=\alpha(\alpha_1 w_1+\ldots+\alpha_n w_n)=\alpha f(v)$$

وبالتالي فإن f تطبيق خطي.

(3) لإثبات وحدانية f نفرض أن $l:V\to W$ تطبيق خطي آخر يحقق الشرط $l(v_i)=w_i$ لكل $1\le i\le n$. عندئذ:

$$l(v)=l(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n)$$
$$=\alpha_1 l(v_1)+\alpha_2 l(v_2)+\ldots+\alpha_n l(v_n)$$
$$=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\ldots+\alpha_n w_n$$
$$=l(v)$$

لكل $v\in V$ وبالتالي $l=f$.

ملاحظة(3−1):

تزودنا المبرهنة(3− 4) بطريقة لتعريف التطبيقات الخطية ويتم ذلك بمعرفة صور عناصر الأساس كماسنوضح ، ذلك في الأمثلة الآتية:

(4−1) أمثلةExamples

مثال(4−1):

عين تطبيقاً خطياً $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ يحقق العلاقة الآتية:

$$f(1,1)=(0,1,0)\quad,\quad f(2,-1)=(1,-1,1)$$

الحل:

نلاحظ أن $(1,1)\,,\,(2,-1)$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$. ولذا فإنه من أجل اي $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ يكون:

$$(x,y)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,-1);\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1+2\alpha_2=x\\ \alpha_1-\alpha_2=y\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 1 & -1 & y\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 0 & -3 & y-x\end{pmatrix}$$

بالحل نجد أن:

$$\alpha_1=\frac{x+2y}{3}\quad,\ \alpha_2=\frac{x-y}{3}$$

أو

$$\alpha_1=\frac{1}{3}(x+2y)\quad,\ \alpha_2=\frac{1}{3}(x-y)$$

وبتطبيق المبرهنة (3−4) نجد أن:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\alpha_1 f(1,1)+\alpha_2 f(2,-1)\\&=\frac{1}{3}(x+2y)(0,1,0)+\frac{1}{3}(x-y)(1,-1,1)\\&=\left(0,\frac{1}{3}(x+2y),0\right)+\frac{1}{3}(x-y,y-x,x-y)\\&=\frac{1}{3}(x-y,3y,x-y)\end{aligned}$$

لذا فإن قاعدة تعريف التطبيق الخطي المطلوب هي:

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y,y,\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y\right)$$

مثال(2−4):

بين أنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ يحقق ما يأتي:

$$f(1,1)=(0,2)\quad,\quad f(3,1)=(2,-4)$$

ثم عين صيغة هذا التطبيق من أجل f.

الحل:

بمـا أن المتجهـين $(3,1)$, $(1,1)$ مسـتقلان خطيـاً، فإنهمـا يشـكلان أساسـاً لــ $\mathbb{R}^2$ وبالتالي،وحسب المبرهنـة (3− 4)، يوجد تطبيق خطـي وحيد. عندئـذ مـن أجـل أي متجـه $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ توجد $\alpha_1,\alpha_2\in F$ بحيث إن:

$$
\begin{aligned}
&(a,b)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(3,1)\\
&\left.\begin{aligned}\alpha_1+3\alpha_2&=a\\ \alpha_1+\alpha_2&=b\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
$$

وبالحل نجد $\alpha_2=\frac{1}{2}(a-b)$, $\alpha_1=\frac{1}{2}(3b-a)$،وبذلك يكون:

$$
\begin{aligned}
f(a,b)&=\alpha_1 f(1,1)+\alpha_2 f(3,1)\\
&=\frac{1}{2}(3b-a)(0,2)+\frac{1}{2}(a-b)(2,-4)\\
&=(a-b,-3a+5b)
\end{aligned}
$$

وبالتالي فإن قاعدة تعريف التطبيق الخطي المطلوب هي:

$$f(a,b)=(a-b,-3a+5b)$$

مثال(3−4):

هل يوجد تطبيق خطي $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ يحقق

$$f(5,5)=(3,-2)\ ,\ f(2,2)=(8,-6)\ ؟$$

الحل:

إن المتجهين $(2,2)$, $(5,5)$ مرتبطان خطياًوبذلك لا يشكلان أساساً لـ $\mathbb{R}^2$. وبالتالي فإن المبرهنة (3−4) غير محققة، فلو كان f خطياً لكان $(5,5)=\frac{5}{2}(2,2)$،ومنه:

$$f\ (5,5)=\frac{5}{2}f\ (2,2)=\frac{5}{2}(8,-6)=(20,-15)$$

ولكن حسب الفرض $f\ (5,5)=(3,-2)$. إذاً لا يوجد مثل هذا التطبيق.

(5−1) نواة وصورة تطبيق خطي

Kernal and Imag a linear mapping

تعريف(5−1):

ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً من فضاء المتجهات V إلى فضاء المتجهات W (على الحقل العددي F). عندئذ نسمي مجموعة عناصر V،التي صورتها وفق f تساوي المتجه الصفري 0_w للفضاء W، بنواة التطبيق الخطي fونرمز لها بالرمز $\ker f$. كما نسمي الصورة المباشرة $f\ (V)$ للفضاء Vبالنسبة لـ fبصورة fونرمز لها بالرمز $\operatorname{Im} f$.
بناءً على ذلك يكون لدينا:

$$\ker f=\{v\in V:f\ (v)=0_w\}=f^{-1}(0_w)$$

$$\operatorname{Im} f=\{f\ (v):v\in V\}=f\ (V)$$

تبين لنا المبرهنة الآتية أن كلاً من $\ker f$ و $\operatorname{Im} f$ فضاء جزئي من V , W على الترتيب.

مبرهنة(5−1):

إذا كان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً.عندئذ:

1) $\ker f$ فضاء جزئي من V.

2) $\operatorname{Im} f$ فضاء جزئي من W.

البرهان:

بما أن $f(0)=0$ فإن كلاً من $\ker f \neq \phi$ و $\mathrm{Im} f \neq \phi$.

(1) لنفرض أن $u, v \in \ker f$ و $\alpha \in F$. عندئذ:

$$f(u+v)=f(u)+f(v)=0+0=0 \text{ و } f(\alpha u)=\alpha f(u)=\alpha 0=0$$

ولذا فإن $u+v \in \ker f$ و $\alpha u \in \ker f$. ومنه $\ker f$ فضاء جزئيمن V.

(2) لنفرض أن $w_1, w_2 \in \mathrm{Im} f$ و $\alpha \in F$. عندئذ يوجد $v_1, v_2 \in V$، حيث $f(v_1)=w_1 \ , f(v_2)=w_2$.

الآن، لدينا $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)=w_1+w_2$، ولذا فإن $w_1+w_2 \in \mathrm{Im} f$. كما أن $f(\alpha v_1)=\alpha f(v_1)=\alpha w_1$، ومنه $\alpha w_1 \in \mathrm{Im} f$، إذاً $\mathrm{Im} f$ فضاء جزئي من W.

تعريف(5−2):

إذا كان $f: V \to W$ تطبيقاً خطياً، فإننا نسمي بعد $\ker f$ بصفرية f $(\mathrm{nullity}\ f)$، كما نسمي بعد $\mathrm{Im} f$ برتبة f $(\mathrm{rank}\ f)$، أي أن:

$$\mathrm{nullity}(f)=\dim(\ker f)$$
$$\mathrm{rank}(f)=\dim(\mathrm{Im} f)$$

مثال(5−1):

ليكن $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالقاعدة:

$$f(x,y,z)=(x,x,y,y)$$

والمطلوب عين نواة وصورة هذا التطبيق، واحسب كلاً من $\mathrm{rank} f \ , \mathrm{nullity}\ f$.

الحل:

حسب تعريف نواة التطبيق الخطي f يكون:

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z)=(0,0,0,0)\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ (x,x,y,y)=(0,0,0,0)\}\\ &= \{(0,0,z) \ : \ z\in\mathbb{R}\}\Rightarrow\\ \ker f &= \{z(0,0,1) \ : \ z\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

ومنه $\text{nullity } f = \dim(\ker f) = 1$.

ويكون:

$$\begin{aligned}\text{Im} f &= \{f(x,y,z)\in\mathbb{R}^4 \ : \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{x(1,1,0,0)+y(0,0,1,1) : x,y\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

ومنه $\text{rank}(f) = \dim(\text{Im} f) = 2$.

الآن، إذا كان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً فإن المبرهنة الاتية تزودنا بطريقة لحساب أساس الفضاء الجزئي $\text{Im} f$.

مبرهنة(5−2):

إذا كـان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياًوكـان $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أساساً للفضـاء V فإن المجموعة $\{f(v_1),f(v_2),...,f(v_n)\}$ تولد $\text{Im} f$.

البرهان: نفرض أن $w\in \text{Im} f$، فإنه يوجد $v\in V$، بحيث يكون $f(v)=w$، وبما أن $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أساس للفضاء V فإنه يوجد $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$، بحيث يكون $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n$،ولذا فإن:

$$w=f(v)=\alpha_1 f(v_1)+\alpha_2 f(v_2)+...+\alpha_n f(v_n)$$

وبالتالي فإن المجموعة $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ تولد $\operatorname{Im} f$.

ملاحظة(1−5):

لإيجاد أساس للفضاء $\operatorname{Im} f$ ، نستخدم أولاً المبرهنة (5−2) من أجل إيجاد مجموعة مولدة للفضاء $\operatorname{Im} f$ ،ومن ثم نتبع خوارزمية الأساس كجزء من المجموعة المولدة.

مثال(2−5):

عين أساس وبعد كل من صورة ونواة التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, x_2 - 3x_3, x_3 + 4x_4)$$

الحل:

لدينا

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker f \Leftrightarrow \\
&f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0) \\
&x_1 + 2x_2 = 0 \\
&x_2 - 3x_3 = 0 \\
&x_3 + 4x_4 = 0 \\
&x_4 = 1
\end{aligned}$$

بحل هذا النظام نجد أن $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(24, -12, -4, 1)$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ،وبالتالي $\ker f = \{\alpha(24, -12, -4, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ،وبالتالي فإن $\{(24, -12, -4, 1)\}$ أساس لـ $\ker f$ هو، هذا يعني أن $\dim \ker f = 1$.

للحصول على أساس الفضاء $\operatorname{Im} f$ نستخدمالمبرهنة (5−2) أولاً،وذلك لإيجاد مجموعة مولدة لـ $\operatorname{Im} f$ وذلك بأخذ الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^4$. لدينا:

$$f\ (1,0,0,0)=(1,0,0)$$
$$f\ (0,1,0,0)=(2,1,0)$$
$$f\ (0,0,1,0)=(0,-3,1)$$
$$f\ (0,0,0,1)=(0,0,4)$$

وبالتالي فإن المجموعة $\{(1,0,0),(2,1,0),(0,-3,1),(0,0,4)\}$ تولد $\operatorname{Im} f$.

وبالتالي نحصل على المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

نستخدم التحويلات الأولية على المصفوفة للحصول على الشكل الدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A وهو:

$$A\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ومن ثمّ تكون المتجهات مستقلة خطيّاً وتولّد $\operatorname{Im} f$ فهي اساس $\operatorname{Im} f$ ،

ولهذا فإن أساس الفضاء $\operatorname{Im} f$ هو $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ، أي أن $\dim \operatorname{Im} f=3$.

مثال(3−5):

عين أساس وبعد كل من $\operatorname{Im} f$ و $\ker f$ ،حيث $f: P_3 \to P_3$ تطبيق خطي معرف بالقاعدة:

$$f\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right)=a_1+2a_2x+3a_3x^3$$

الحل:

$$\begin{aligned} g(x)\in\ker f &\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=a_1+2a_2x+3a_3x^3=0 \\ &\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0 \\ &\Leftrightarrow g(x)=a_0 \end{aligned}$$

إذاً $\ker f=\{a_0 : a_0\in\mathbb{R}\}$ ،ولذا فإن $\{1\}$ أساس النواة،ومنه $\dim\ker f=1$.

الآن، إن $\operatorname{Im} f=\left\{a_1+2a_2x+3a_3x^3 \;;\; a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$. ومنه $\{1,2x,3x^2\}$ أساس للفضاء $\operatorname{Im} f$. وبالتالي فإن $\dim\operatorname{Im} f=3$.

مبرهنة(3−5) (مبرهنة البعد للتطبيقات الخطية):

إذا كان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياًوكان $\dim V=n$، فإن $\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f=n$، أي أن $\operatorname{nullity}(f)+\operatorname{rank}(f)=n$.

البرهان:

لنفرض أن $\dim\ker f=k$ وأن $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ أساس للفضاء $\ker f$. عندئذ نستطيع إيجاد المتجهات $v_{k+1},\ldots,v_n$، بحيث تشكل المجموعة $\{v_1,v_2,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$ أساساً للفضاء V. ولهذا،وحسب المبرهنة (2−5)، نجد أن المجموعة $\{f(v_1),f(v_2),\ldots,f(v_k),f(v_{k+1}),\ldots,f(v_n)\}$ تولد الفضاء $\operatorname{Im} f$. بما أن $v_1,v_2,\ldots,v_k\in\ker f$، فإن $f(v_1)=f(v_2)=\cdots=f(v_k)=0$،ومن ثم فإن $\{f(v_{k+1}),\ldots,f(v_n)\}$ تولد

$\operatorname{Im} f$. بقي البرهان على أن هذه المجموعة هي أساس للفضاء $\operatorname{Im} f$. نفرض أن $\alpha_k, \ldots, \alpha_n \in F$ ، بحيث يكون $\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0$ ، وبما أن f تطبيق خطي فإن $f(\alpha_{k+1} v_{k+1}, \ldots, \alpha_n v_n) = 0$ ، وبالتالي $\alpha_{k+1} v_{k+1}, \ldots, \alpha_n v_n \in \ker f$ ،وبما أن $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ أساس للفضاء $\ker f$ فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ ، بحيث يكون:

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$$

ولذا فإن $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + (-\alpha_{k+1}) v_{k+1} + \ldots + (-\alpha_n) v_n$

ومنه $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$.

إذاً $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ أساس للفضاء $\operatorname{Im} f$ ، وبالتالي فإن $\dim \operatorname{Im} f = n - k$ عندئذ:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = k + (n-k) = n \text{ .}$$

المبرهنة الآتيةتحدد لنا العلاقة الوثيقة بين التطبيقات الخطية المتباينةونواة التطبيق الخطي.

مبرهنة(5−4):

ليكن $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً. عندئذ يكون f متبايناً إذا وفقط إذا كانت $\ker f = \{0\}$.

البرهان:

لنفرض أولاً أن f متباين وليكن $v \in \ker f$. عندئذ:

$$f(v) = 0 = f(0)$$

وبما أن f متباين فإن $v = 0$.

العكس: نفرض أن $\ker f=\{0\}$، وليكن $u,v\in V$، بحيث يكون $f(u)=f(v)$.
عندئذ:

$$f(u)=f(v)\Rightarrow f(u)-f(v)=0\Rightarrow f(u-v)=0$$
$$\Rightarrow u-v\in\ker f\Rightarrow u-v=0\Rightarrow u=v$$

وبالتالي فإن f متباين.

نتيجة(5−1):

ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، بحيث $\dim V=\dim W=n$. عندئذ يكون f غامراً إذا وفقط إذا كان f متبايناً.

البرهان:

بالاعتماد على مبرهنة البعد،يكون لدينا $\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f=n$.

الآن، إذا كان f غامراً.عندئذ $\operatorname{Im} f=W$،ولذلك فإن:

$$\dim\ker f=n-\dim\operatorname{Im} f=n-n=0$$

ومنه $\ker f=\{0\}$، وبالتالي يكون f متبايناً.

العكس: نفرض أن f متباين، وبالتالي فإن $\dim\ker f=0$،وبذلكيكون $\dim\operatorname{Im} f=\dim W$. إذاً $\operatorname{Im} f=W$،وبالتالي f غامر.

مثال(5−4):

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالقاعدة:

$$f(x,y)=(x+y,y,2x-y)$$

أثبت أن f متباين.

الحل:

$$\forall (x,y) \in \ker f \iff x+y=0 \ ,\ y=0 \ ,\ 2x-y=0 \iff x=y=0$$

إذاً $\ker f = \{(0,0)\}$ ، وبالتالي فإن f متباين.

مثال(5−5):

ليكن $f : P_2 \to M_{(2,2)}(F)$ هو التطبيق الخطي المعرف بالقاعدة:

$$f\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 - a_0 \\ a_1 + a_0 & 2a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

برهن أن f متباين.

الحل:

$$\forall \ g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \ker f \iff$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 - a_0 \\ a_1 + a_0 & 2a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وهذا يكافئ:

$$a_1 = 0 \ ,\ a_1 - a_0 = 0 \ ,\ a_1 + a_0 = 0$$
$$\iff 2a_1 - a_2 = 0$$
$$\iff a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

وهذا يعني أن $\ker f = \{0\}$،وبالتالي فإن f متباين.

مثال(5−6):

ليكن $f : P_2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالقاعدة:

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\left(g\left(0\right),g\left(1\right)\right)$$

أوجد $\ker f$ ثم بين أن f غامر.

الحل:

$$g\left(x\right)\in\ker f \quad \Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)=\left(0,0\right)$$

ومنه:

$$\left(g\left(0\right),g\left(1\right)\right)=\left(0,0\right) \quad \Leftrightarrow g\left(x\right)=a_0 : a_0\in R$$

إذاً $\ker f=\{a_0\}$. وبالتالي فإن $\dim\ker f=1$ ،وحسب المبرهنة (2−5)، نجد أن $\dim\operatorname{Im} f=3-1=2=\dim\mathbb{R}^2$ ،هذا يعني أن $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$. عندئذ f غامر.

(6−1) التطبيقات الخطية غير النظامية والتماثلات

Singular Linear Mappings and Isomorphisms

تعريف(6−1):

ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً. عندئذ نقول إن f تطبيق خطي غير نظامي، . أي إذا وجد $v\in V$ بحيث يكون $v\neq 0$،ولكن $f\left(v\right)=0$، وبذلك يكون $f:V\to W$ نظامياً إذا كان $0\in V$،هو المتجه الوحيد من V الذي صورته $0\in W$. أو بشكل مكافئ، f نظامي $\Leftrightarrow$ $\ker f=\{0\}$.

مثال(6−1):

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً بالشكل:

$$f\left(x,y\right)=\left(x-3y,x-y\right)$$

والمطلوب: بين فيما إذا كان f غير نظامي أم لا ؟

الحل:

لنوجد $\ker f$ ، إن:

$$\forall v=(x,y)\in \ker f \Rightarrow f(v)=0$$

ومنه:

$$(x-3y,x-y)=(0,0) \Rightarrow \begin{array}{l} x-3y=0 \\ x-y=0 \end{array}$$

وبالتالي $x=0$ و $y=0$ ،وهو الحل الوحيد. عندئذ f نظامي.

مثال(2−6):

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y)=(0,2x+3y)$$

هل التطبيق f نظامي ؟ وإذا لم يكن كذلك، أوجد متجهاً $v\neq 0$، حيث $f(v)=0$.

الحل:

$$\forall\ v\in \ker f \Rightarrow f(x,y)=(0,0)$$

وبالتالي:

$$2x+3y=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$$

هذا يعني أن y متغير حر ،وبالتالي f غير نظامي. أما إذا كان $y=1$. عندئذ $v=\left(-\frac{3}{2},1\right)$ ،وهومتجه غير صفري يحقق $f(v)=0$.

نتيجة(1−6):

إذا كان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً،وكان V فضاءً منتهي البعد، عندئذ $\dim V=\dim f(V)$ إذا وفقط إذا f نظامي.

البرهان:

حسب مبرهنة البعد يكون $\dim V=\dim f(V)+\dim(\ker f)$،وبالتالي يكون لـ V و $f(V)$ البعد نفسه إذا وفقط إذا كان $\dim(\ker f)=0$، أي $\ker f=\{0\}$، أي إذا وفقط إذا كان التطبيق f نظامياً.

مبرهنة(1−6):

ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، اذا كان f نظامياً فانّ صورة أية مجموعة مستقلة خطياً في الفضاء V، مستقلة خطياً في W .

البرهان:

لنفرض أن $\{v_1,v_2,...,v_n\}$مجموعة من المتجهات المستقلة خطياً من عناصر Vولنثبت أن المجموعة $\{f(v_1),...,f(v_n)\}$ مستقلة خطياً أيضاً، لنفرض أنه يوجد $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$، بحيث إن:

$$f(\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n)=\alpha_1 f(v_1)+...+\alpha_n f(v_n)=0$$

بما أن f تطبيق خطي، فإن $f(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...,\alpha_n v_n)=0$، وبالتالي $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...,\alpha_n v_n\in\ker f$، ولكن f نظامي، أي أن $\ker f=\{0\}$، اذن:

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...,\alpha_n v_n=0 .$$

بما أن $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مستقلة خطياً، فإن $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$،وهذا يعني أن $\{f(v_1),...,f(v_n)\}$ مستقلة خطياً.

مبرهنة(6−2):

ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، عندئذ يكون f متبايناً إذا وفقط إذا كان f نظامياً.

البرهان:

لنفرض أولاً أن f متباين ولتكن $v\in\ker f$، وبالتالي:

$$f(v)=0=f(0).$$

بما أن f متباين، فإن $v=0$. إذاً $\ker f=\{0\}$،وبالتالي f نظامي.

العكس: نفرض أن f نظامي، أي $\ker f=\{0\}$ وليكن $v,u\in V$، بحيث يكون $f(v)=f(u)$. عندئذ:

$$f(u)=f(v)\Rightarrow f(u)-f(v)=0\Rightarrow f(u-v)=0$$
$$\Rightarrow u-v\in\ker f\Rightarrow u-v=0\Rightarrow u=v$$

وبالتالي فإن f متباين.

مثال(6−3):

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y)=(x-y,y,2x+y)$$

أثبت أن f متباين.

الحل:

بفرض $v=(x,y)\in\ker f$، فإن:

$$x-y=0\ ,\ y=0\ ,\ 2x+y=0$$

وهذا يكافئ $x = y = 0$ ، إذاً $\ker f = \{(0,0)\}$ ،وبالتالي f نظامي، وبالتالي فإن f متباين.

مثال(4−6):

ليكن $f : P_2 \to M_{2\times 2}$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_1 \\ 2a_1 - a_2 & a_1 + a_0 \end{pmatrix}$$

أثبت أن f متباين.

الحل:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \ker f \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_1 \\ 2a_1 - a_2 & a_1 + a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وهذا يكافئ:

$$a_1 - a_0 = 0 \ , \ a_1 = 0 \ , \ 2a_1 - a_2 = 0 \ , \ a_1 + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

وبالتالي فإن $\ker f = \{0\}$. عندئذ f متباين.

مثال(5−6):

ليكن $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ التطبيق الخطي المصفوفي المعطى بالعلاقة $f_A(u) = Au$ ، حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. أثبت أن f غير نظامي.

الحل:

نستطيع أن نكتب

$$v=(x,y,z)\in\ker f \iff \begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{aligned} x+2z&=0\\ x+y-z&=0\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن $\ker f=\{(-2,3,1)\,t : t\in\mathbb{R}\}$، وبالتالي فإن $\ker f\neq\{0\}$،أي أن f غير نظامي.

نتيجة(2−6):

ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، حيث $\dim V=\dim W=n$. عندئذ يكون f تطبيقاً خطياً غامراً إذا و فقط إذا كان f نظامياً.

البرهان:

باستخدام مبرهنة البعد يكون $\dim\ker f+\dim \operatorname{Im} f=n$. الآن، إذا كان f غامراً فإن $\operatorname{Im} f=W$،وبالتالي:

$$\dim\ker f=n-\dim\operatorname{Im} f=n-n=0$$

ومنه $\ker f=\{0\}$، هذا يعني أن f نظامي.

العكس: نفرض أن f نظامي. عندئذ $\dim\ker f=0$،ولذلك يكون $\dim\operatorname{Im} f=n=\dim W$. إذاً $\operatorname{Im} f=W$. وبالتالي فإن f غامر.

تعريف(2−6):

نقول إن التطبيق الخطي $f:V\to W$ تماثل(isomorphism) إذا كان f متبايناً وغامراً. ونقول إن الفضاءين المتجهين V, W متماثلان (isomorphic) إذا وجد تماثل $f:V\to W$، ونرمز لذلك بالرمز $V\cong W$.

ملاحظة(6−1):

إن كلمة (isomorphism) مشتقة من كلمتين لاتينيتين وهما iso وتعني نفس و morphism وتعني شكل. ولذلك فإن التماثل يعني الشكل نفسه.

مثال(6−6):

إن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ والمعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x-z,y-x,z-y)$$

تماثل.

الحل:

نبرهن على أن f متباين وغامر.

$$v=(x,y,z)\in\ker f \iff x-z=0\ ,\ y-x=0\ ,\ z-y=0$$

وبحل هذا النظام نجد أن $x=y=z=0$،ولذلك فإن $\ker f=\{0\}$، ومن ثم فإن f متباين وباستخدام مبرهنة البعد يكون لدينا:

$$\dim(\ker f)+\dim(\operatorname{Im} f)=3=\dim\mathbb{R}^3$$

وبما أن $\dim(\ker f)=0$، فإن $\dim(\operatorname{Im} f)=\dim\mathbb{R}^3=3$. ومنه $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^3$ هذا يعني أن f غامر. عندئذ f تماثل.

مثال(6−7):

إذا كانت B مصفوفة من المرتبة 2 ولها معكوس، فإن التطبيق:

$$f:M_{2\times3}\to M_{2\times3}$$

والمعرف بالشكل $f(A)=BA$ تماثل.

الحل:

لنبين أولاً أن $\ker f = \{0\}$، إذاكان:

$$A \in \ker f \Leftrightarrow f(A) = BA = 0 \Leftrightarrow B^{-1}(BA) = B^{-1}0 \Leftrightarrow IA = A = 0$$

ولذلك فإن f متباين. ولإثبات أن f غامر، نفرض أن $C \in M_{2\times 3}$. عندئذ $B^{-1}C \in M_{2\times 3}$، كما أن:

$$f\left(B^{-1}C\right) = B\left(B^{-1}C\right) = IC = C$$

هذا يعني أن f غامر. وبالتالي فإن f تماثل.

مبرهنة(3−6):

إذا كان $f: V \to W$ تطبيقاً خطياً، وكان V, W فضاءين منتهيي البعد. عندئذ تكون العبارتان الآتيتان متكافئتين:

1. f تماثل (إيزومورفيزم).
2. إذا كان $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساساً للفضاء V، فإن $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ أساس للفضاء W.

البرهان:

$1) \Leftarrow 2)$ لنفرض أن f تماثل،وأن $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساس للفضاء V. ولنفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$، بحيث يكون $\alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n) = 0$. بما أن f تطبيق خطي، فإن $f\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..., \alpha_n v_n\right) = 0$،ومنه:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..., \alpha_n v_n \in \ker f$$

وبما أن f متباين، فإن $\ker f = \{0\}$،ومنه:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..., \alpha_n v_n = 0$$

وبما أن $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ مستقلة خطياً، فإن $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

إذاً $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$مستقلة خطياً. لنثبت الآن أنها تولد W.

بفرض أن $w \in W$. وبما أن f غامر فإنه يوجد $v \in V$، بحيث $f(v) = w$،وبالتالي يوجد $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$،بحيث يكون $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ..., \beta_n v_n$. عندئذ:

$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ..., \beta_n v_n) \\ &= \beta_1 f(v_1) + \beta_2 f(v_2) + ..., \beta_n f(v_n) \end{aligned}$$

ومن ثم فإن $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ تولد W،وبالتالي فهي أساس للفضاء W.

2) $\Leftarrow$ 1) نفرض أولاً أن $v \in V$، حيث $v \in \ker f$. عندئذ $f(v) = 0$،ولكن $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..., \alpha_n v_n$، حيث $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$،ومنه:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..., \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0 \end{aligned}$$

إذاً $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$،وبالتالي $v = 0$. عندئذ f متباين.

للبرهان على أن f غامر ، نفرض أن $w \in W$. عندئذ:

$$w = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_n f(v_n)$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$،وبما أن f تطبيق خطي فإن

$$w = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..., \alpha_n v_n)$$

وبوضع $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

نجد أن $f(v) = w$. وهذا يعني أن f غامر. عندئذ f تماثل.

نتيجة(6−3):

ليكن V, W فضاءين متجهين منتهيي البعد، عندئذ يكون $V \cong W$ إذا وفقط إذا كان $\dim V = \dim W$.

البرهان:

نفرض أولاً أن $f : V \to W$ تماثل. إذا كان $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساساً للفضاء V فإنه،وبالاعتمادعلى المبرهنة (6−3)، نجد أن $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ أساس للفضاء W، ومن ثم فإن $\dim V = \dim W$.

العكس: نفرض أن $n = \dim V = \dim W$،ولنفرض أن $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساس للفضاء V. وأن $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ أساس للفضاء W. وحسب المبرهنة (3−4)، يوجد تطبيق خطي وحيد $f : V \to W$، بحيث يكون $f(v_i) = w_i$ من أجل جميع $1 \le i \le n$. إذاً $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ أساس للفضاء W،ولهذا فإن f تماثل،وذلك حسب المبرهنة (6−3).

مثال(6−8):

إن الفضاء المتجهي $P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \; ; \; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$،والذي أساسه $\{1, x, x^2\}$متماثل مع الفضاء $\mathbb{R}^3$، وذلك لأن:

$$\dim P_2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

إن المبرهنة الآتية تضمن لنا وجود معكوس للتطبيقات الخطية المتماثلة.

مبرهنة(6−4):

ليكن V, W فضاءين متجهين منتهيي البعد،وليكن $f : V \to W$ تطبيقاً خطياً، عندئذ تكون العبارتان الآتيتان متكافئتين:

1) f تماثل.

2)يوجد تطبيق خطي وحيد $f^{-1}:W\to V$ ، بحيث يكون:

$$f\circ f^{-1}=I_w \qquad , \quad f^{-1}\circ f=I_v$$

البرهان:

1) $\Leftarrow$ 2) لنفرض أن f تماثلوأن $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أساساً للفضاء V، فإنه،وحسب المبرهنة (6−3)، يكون $\{f(v_1),f(v_2),...,f(v_n)\}$ أساساً للفضاء W. نعرف الآن التطبيق الخطي $f^{-1}:W\to V$ بالشكل $f^{-1}(f(v_1))=v_1$ لكل $1\le i\le n$ ولنبرهن على أن $(f^{-1}\circ f)(v)=v$ لكل $v\in V$. وبما أن $v\in V$ فإنه يوجد $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ ، حيث $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...,\alpha_nv_n$ ولذلك فإن:

$$\begin{aligned}f^{-1}\circ f(v)=f^{-1}(f(v))&=f^{-1}(\alpha_1f(v_1)+...+\alpha_nf(v_n))\\&=\alpha_1f^{-1}(f(v_1))+...+\alpha_nf^{-1}(f(v_n))\\&=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n=v\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $f^{-1}\circ f=I_v$. وبالمثل يمكن البرهان على أن $f\circ f^{-1}=I_w$.

وللبرهان على وحدانية f^{-1}، نفرض أن $f_1^{-1}:W\to V$، حيث $f_1^{-1}\circ f=I_v$ و $f\circ f_1^{-1}=I_w$. عندئذ من أجل كل $w\in W$ يكون:

$$f_1^{-1}(w)=f_1^{-1}(f(f^{-1}(w)))=(f_1^{-1}\circ T)(f^{-1}(w))=f^{-1}(w)$$

ولذلك فإن $f^{-1}=f_1^{-1}$.

2) $\Leftarrow$ 1)نفرض أن الشرط محقق. لكل $u,v\in V$ يكون لدينا:

$$f(v)=f(u)\Rightarrow f^{-1}(f(v))=f^{-1}(f(u))\Rightarrow u=v$$

إذاً f متبـاين. ولإثبـات أن f غـامر، لـيكن $w \in W$. وبمـا أن $f \circ f^{-1} = I_w$ فـإن $f\left(f^{-1}(w)\right) = w$. وبالتالي فإن f غامر. عندئذ fتماثل.

ملاحظة(6−2):

1− يسمى التطبيق الخطي f^{-1}، في المبرهنة (6−4)، معكوس التطبيق الخطي f.

2− نلاحظ أن $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

3−يكون $f(v) = w$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(w) = v$.

مثال(6−9):

إذا كان $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً تماثلاً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y) = (x-y, x-2y)$$

والمطلوب أوجد صيغة لـ f^{-1}.

الحل:

نضع $f(x,y) = (a,b)$ (وبذلك يكون $(f^{-1}(a,b) = (x,y)$)

ومنه $(x-y, x-2y) = (a,b)$، أو:

$$\begin{aligned} x - y &= a \\ x - 2y &= b \end{aligned}$$

وبحل نظام المعادلات الخطي نحصل على $y = a-b\ ,\ x = 2a-b$، ومنه:

$$f^{-1}(a,b) = (2a-b, a-b)$$

أوبشكل مكافئ، يكون: $f^{-1}(x,y) = (2x-y, x-y)$

إن النتيجة الآتيةتبين لنا أن علاقة التماثل (الإيزومورفيزم) هي علاقة تكافؤ على جميع الفضاءات المتجهية.

نتيجة(4−6):

إذا كان U, V, W فضاءات متجهية على الحقل F فإن:

(1) $\cong$ انعكاسية، أي أن $V \cong V$ من أجل أي فضاء متجهي V.

(2) $\cong$ تناظرية، أي أنه إذا كان $U \cong V$ فإن $V \cong U$.

(3) $\cong$ متعدية، أي أنه إذا كان $U \cong V$ و$V \cong W$ فإن $U \cong W$.

(7−1) العمليات على التطبيقات الخطية

operations of Linear Mappings

نعرف هنا العمليات على التطبيقات الخطية ونبين أن هذه العمليات تحقق الخواص نفسها التي تحققها العمليات على المصفوفات.

تعريف(7−1):

ليكن $f : V \to W$ و$g : V \to W$ تطبيقين خطيين من فضاء المتجهات V إلى فضاء المتجهات W حيث كل من W, V فضاء متجهي على نفس الحقل ،وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$

1− نعرف المجموع $g+f$ بأنه الدالة (التطبيق):

$$(g+f)(v) = g(v) + f(v)$$ ، لكل $v \in V$.

2− نعرف الفرق $g-f$ بأنه التطبيق:

$$(g-f)(v) = g(v) - f(v)$$ ، لكل $v \in V$.

نعرف الضرب بعدد αg، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ بأنه التطبيق:

$(\alpha g)(v) = \alpha g(v)$، لكل $v \in V$.

مبرهنة(7−1):

إذا كان $f : V \to W$ و $g : V \to W$ تطبيقاً خطياً، فإن كلاً من $g + f$ ، $g - f$ ، αg ، تطبيق خطي.

البرهان:

سنبرهن أن $g + f$ تطبيق خطي. نفرض أن $u, v \in V$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$ ، عندئذ:

$$\begin{aligned}
(g+f)(u+v) &= g(u+v) + f(u+v) \\
&= g(u) + g(v) + f(u) + f(v) \\
&= \left[g(u) + f(u)\right] + \left[g(v) + f(v)\right] \\
&= (g+f)(u) + (g+f)(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g+f)(\alpha u) &= g(\alpha u) + f(\alpha u) \\
&= \alpha g(u) + \alpha f(u) \\
&= \alpha\left[g(u) + f(u)\right] \\
&= \alpha(g+f)(u)
\end{aligned}$$

إذاً $g + f$ تطبيق خطي.

وبطريقة مشابهة، نبرهن بأن $g - f$ و αg تطبيقات خطية أيضاً.

تعريف(7−2):

إذا كان $f : V \to W$ و $g : U \to V$ تطبيقين خطيين فإن $f \circ g : U \to W$ تطبيق معرف بالقاعدة: $(f \circ g)(u) = f(g(u))$، لكل $u \in U$.

مبرهنة(7−2):

إذا كـان $f:V\to W$ و $g:U\to V$ تطبيقـين خطيـين فـإن $f\circ g:U\to W$ تطبيق خطي أيضاً.

البرهان:

لكل $u,v\in V$ ولكل $\alpha\in\mathbb{R}$ يكون لدينا:

(1

$$\begin{aligned}(f\circ g)(u+v)&=f\left(g(u+v)\right)\\&=f\left(g(u)+g(v)\right)\\&=f\left(g(u)\right)+f\left(g(v)\right)\\&=(f\circ g)(u)+(f\circ g)(v)\end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned}(f\circ g)(\alpha u)&=f\left(g(\alpha u)\right)\\&=f\left(\alpha g(u)\right)\\&=\alpha f\left(g(u)\right)\\&=\alpha(f\circ g)(u)\end{aligned}$$

ولذلك فإن $f\circ g$ تطبيق خطي.

مثال(7−1):

لتكن التطبيقات الخطية:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ ,\quad g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\quad ,\quad h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

المعرفة بالشكل:

$$f(x,y,z)=(y,x+z),$$
$$g(x,y,z)=(2x,x-y),$$
$$h(x,y,z)=(y,2x)$$

وبفرض أن $v=(4,-1,5)\ ,\ w=(3,4,1)\in\mathbb{R}^3$، والمطلوب:

1) أوجد $(f+g)(w)\ ,\ (f+g)(v)$، ثم أوجد صيغة لـ $f+g$.

2) أوجد $(h\circ g)(w)\ ,\ (h\circ f)(v)$، ثم أوجد صيغة لـ $h\circ f$ و $h\circ g$.

3) أوجد صيغة لكل من $h\circ(f+g)$ و $h\circ f+h\circ g$ ، ثمقارن بينهما.

4) أوجد صيغة لـ h^2.

الحل:

1) إن:

$$\begin{aligned}(f+g)(v)&=f(v)+g(v)=f(4,-1,5)+g(4,-1,5)\\&=(-1,9)+(10,5)=(9,14)\\(f+g)(w)&=f(w)+g(w)=f(3,4,1)+g(3,4,1)=(4,4)+(2,-1)\\&=(6,3)\end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned}(f+g)(x,y,z)&=f(x,y,z)+g(x,y,z)\\&=(y,x+z)+(2z,x-y)\\&=(y+2z,2x-y+z)\end{aligned}$$

2) يكون:

$$(h\circ f)(v)=h(f(v))=h(F(4,-1,5))=h(-1,9)=(9,-2)$$
$$(h\circ g)(w)=h(g(w))=h(g(3,4,1))=h(2,1)=(-1,4)$$

وبالتالي فإن:

$$(h\circ f)(x,y,z)=h\left(f\left(x,y,z\right)\right)=h\left(y,x+z\right)=\left(x+z,2y\right)$$

$$(h\circ g)(x,y,z)=h\left(g\left(x,y,z\right)\right)=h\left(2z,x-y\right)=\left(x-y,4z\right)$$

3) إن:

$$h\circ(f+g)(x,y,z)=h\left((f+g)(x,y,z)\right)=h\left(y+2z,2x-y+z\right)$$
$$=\left(2x-y+z,2y+4z\right)$$

$$(h\circ f+h\circ g)(x,y,z)=(h\circ f)(x,y,z)+(h\circ g)(x,y,z)$$
$$=\left(x+z,2y\right)+\left(x-y,4z\right)$$
$$=\left(2x-y+z,2y+4z\right)$$

بالمقارنة نجد أن $h\circ(f+g)=h\circ f+h\circ g$

4) نوجد صيغة H^2:

$$H^2(x,y)=H\left(H\left(x,y\right)\right)=H\left(y,2x\right)=\left(2x,2y\right).$$

إن المبرهنة الآتية تزودنا بخواص التطبيقات الخطية المشابهة لخواص المصفوفات.

مبرهنة(3−7):

لتكن f,g,h تطبيقات خطية،وليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$،ولنفرض أن جميع التطبيقات الخطية المبينة معرفة عندئذ:

1) $f+(g+h)=(f+g)+h$

2) $f+g=g+f$

3) $f+0=f$

4) $f+(-f)=0$

5) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$

6) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$

7) $(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$

8) $1.f=f$

9) $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$

10) $f\circ I=I\circ f=f$

11) $f\circ(g+h)=(f\circ g)+(f\circ h)$

12) $(f+g)\circ h=(f\circ h)+(g\circ h)$

13) $f\circ 0=0\circ f=0$

14) $\alpha(f\circ g)=(\alpha f)\circ g=f\circ(\alpha g)$

البرهان:

سنبرهن البنود $(2),(7),(9),(11),(12),(14)$ونترك باقي البنود للطالب.

نفرض أن v متجه من V، عندئذ:

2) $(f+g)(v)=f(v)+g(v)=g(v)+f(v)=(g+f)(v)$

إذاً $f+g=g+f$.

7) $[(\alpha\beta)f](v)=(\alpha\beta)(f(v))=\alpha(\beta f(v))=[\alpha(\beta f)](v)$

ومنه $(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$.

(9

$$[f\circ(g\circ h)](v)=f\left((g\circ h)\right)(v)=f\left(\left(g\left(h(v)\right)\right)\right)$$
$$=(f\circ g)\left(h(v)\right)=\left[(f\circ g)\circ h\right](v)$$

إذاً $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

(11

$$[f\circ(g+h)](v)=f\left((g+h)(v)\right)=f\left(g(v)+h(v)\right)$$
$$=f\left(g(v)\right)+f\left(h(v)\right)=(f\circ g)(v)+(f\circ h)(v)$$

إذاً:

$$f\circ(g+h)=(f\circ g)+(f\circ h).$$

(12

$$\left((f+g)h\right)(v)=(f+g)\left(h(v)\right)$$
$$=f\left(h(v)\right)+g\left(h(v)\right)$$
$$=(f\circ h)(v)+(g\circ h)(v)$$

عندئذ:

$$(f+g)\circ h=(f\circ h)+(g\circ h).$$

14)من أجل أي $v\in V$ يكون لدينا:

$$\alpha(f\circ g)(v)\quad=\alpha\left(f\left(g(v)\right)\right)=(\alpha f)\left(g(v)\right)=(\alpha f\circ g)(v)$$
$$\left(\alpha(f\circ g)\right)(v)=\alpha(f\circ g)(v)$$
$$=\alpha\left(f\left(g(v)\right)\right)=f\left(\alpha g(v)\right)$$
$$=f\left((\alpha g)(v)\right)=(f\circ\alpha g)(v)$$

ومما سبق ينتج أن $\alpha(f \circ g)=(\alpha f)\circ g = f \circ(\alpha g)$.

(8–1) الفضاء المتجهي للتطبيقات الخطية.

Vector Space of Linear Mappings

مبرهنة(8–1):

ليكن V, W فضاءين على الحقل F. إن مجموعة جميع التطبيقات الخطية المعرفة من V إلى W مع عمليتي الجمع والضرب العددي المعرفتين أعلاه تشكل فضاءً متجهياً على الحقل F.

نرمز عادة لهذا الفضاء بالرمز $\mathrm{Hom}(V, W)$ وهي مشتقة من كلمة (Homomorphism)وتعني تشاكل.

البرهان:

يكفي إثبات أن $\mathrm{Hom}(V, W)$ تحقق البنود الثمانية الواردة في تعريف الفضاء المتجهي.

إذا كان $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ و $\alpha \in F$ ،بالاعتماد على المبرهنة (7–1)، نجد أن:

$$\alpha f, f + g \in \mathrm{Hom}(V, W)$$

ولذا فإن $\mathrm{Hom}(V, W)$ مغلقة بالنسبة لعملية الجمع والضرب بعدد. وباستخدام البنود الثمانية الأولمن المبرهنة (7–3) نجد أن $\mathrm{Hom}(V, W)$ فضاء متجهات بالنسبة لهاتين العمليتين،ويسمى هذا الفضاء، فضاء متجهات التطبيقات الخطية (vector space of linear mapping)

مثال(8–1):

لتكن التطبيقات الخطية الآتية:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ :F(x,y,z)=(x-y-z,x+y)$$
$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ :G(x,y,z)=(2x-z,x-y)$$
$$h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ :H(x,y,z)=(2z,x)$$

المطلوب:

1– بين إلى أي من الفضاءاتالمتجهية (إن وجد) تنتمي التطبيقات f,g,h ؟. ثم أوجد صيغة لـ $f+g\ ,f+h\ ,\ g\circ f\ ,\ 3g+2h$.

2– بين فيما إذا كانت التطبيقات f,g,h مستقلة خطياً كعناصر من الفضاء المتجهي $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$.

الحل: 1– إن التطبيقات الخطية f,g,h تنتمي إلى الفضاء $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ لأنها تطبيقات خطية من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(f+g)(x,y,z)&=f(x,y,z)+g(x,y,z)\\&=(x-y-z,x+y)+(2x-z,x-y)\\&=(3x-y-2z,2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+h)(x,y,z)&=f(x,y,z)+h(x,y,z)\\&=(x-y-z,x+y)+(2z,x)\\&=(x-y+z,2x+y).\end{aligned}$$

إن $g\circ f$ ليس معرفاً لأن مستقر التطبيق f ومنطلق التطبيق g غير متساويين.

$$\begin{aligned}(3g+2h)(x,y,z)&=3g(x,y,z)+2h(x,y,z)\\&=3(2x-z,x-y)+2(2z,x)\\&=(6x-3z,3x-3y)+(4z,2x)\\&=(6x+z,5x-3y)\end{aligned}$$

2– لنبين أن f,g,h هي متجهات مستقلة خطياً في الفضاء $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$.

نفرض أن:

$$\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h = 0,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K \ (1)$$

حيث أن 0 هو التطبيق الصفري. من أجل $e_1 = (1,0,0)$،يكون لدينا:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h)(e_1) &= \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 g(e_1) + \alpha_3 h(e_1)\\ &= \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,1) + \alpha_3(0,1)\\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\\ &= 0(e_1) = (0,0)\end{aligned}$$

ومن (1) يكون:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0),$$

أي أن:

$$(2)\quad \left.\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0\end{aligned}\right\}$$

وبالمثل نجد، من أجل $e_2 = (0,1,0)$، أن:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h)(e_2) &= \alpha_1 f(0,1,0) + \alpha_2 g(0,1,0) + \alpha_3 h(0,1,0)\\ &= \alpha_1(-1,1) + \alpha_2(0,-1) + \alpha_3(0,0)\\ &= (-\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2)\\ &= 0(e_2) = (0,0)\end{aligned}$$

عندئذ:

$$(3)\ -\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

من (2) و (3) نجد أن:

$$(4)\ \alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_3 = 0$$

وبما أن (1) تقتضي (4) فإن التطبيقات f, g, h مستقلة خطياً.

مبرهنة(2−8):

ليكن الفضاءان المتجهيان V, W على حقل F، وليكن $\dim V = n$ و $\dim W = m$، عندئذ $\text{Hom}(V, W)$ منتهي البعد، ويكون:

$$\dim \text{Hom}(V, W) = n.m \,.$$

البرهان:

نفرض أن $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساس لـ V و $D = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ أساس لـ W، فإن كل عنصر $v \in V$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + ... + \alpha_i v_i + ... + \alpha_n v_n$$

نعرف التطبيقات:

$$f_{ij} : V \to W$$
$$f\left(v_{ij}\right) = \alpha_i w_j$$

وذلك من أجل $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$. عندئذ نجد أن المجموعة (الأسرة) $\{f_{ij}\}_{\substack{i=1,2,...,n \\ j=1,2,...,m}}$ تشكل أساس للفضاء المتجهي $\text{Hom}(V, W)$ لأن:

1) إن $f_{ij} \in \text{Hom}(V, W)$، مهما تكن i، ومهما تكن j، لأنه إذا كان $\alpha, \beta \in K$ و $v, v' \in V$. عندئذ:

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + ... + \alpha_i v_i + ... + \alpha_n v_n$$
$$v' = \alpha_1' v_1 + ... + ... + \alpha_i' v_i + ... + \alpha_n' v_n$$

ومنه:

$$\beta v+\gamma\alpha'=\left(\beta\alpha_1+\gamma\alpha'_1\right)v_1+...+\left(\beta\alpha_i+\gamma\alpha'_i\right)v_i+...+\left(\beta\alpha_n+\gamma\alpha'_n\right)v_n$$

ولذلك فإن:

$$\begin{aligned}f_{ij}\left(\beta v+\gamma v'\right)&=\left(\beta\alpha_i+\gamma\alpha'_i\right)w_j\\&=\beta\alpha_i w_j+\gamma\alpha'_i w_j\\&=f_{ij}(v)+f_{ij}(v')\end{aligned}$$

2) إن المجموعة (الأسرة) $\{f_{ij}\}$ مستقلة خطياً لأنه إذا كان:

$$\sum_{i,j}\beta_{ij}f_{ij}=0$$

من أجل $k=1,2,...,n$, v_k عنصراً من أساس V فإن:

$$0=0(v_k)=\left(\sum_{i,j}\beta_{ij}f_{ij}\right)(v_k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}f_{ij}(v_k)=\sum_{j=1}^{m}\beta_{kj}w_j$$

لأن $\alpha_i=0$ عندما $k\neq i$ و $\alpha_k=1$ إذاً:

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_{kj}w_j=\beta_{k1}w_1+...+\beta_{km}w_m=0$$

لكن w_j , $j=1,2,...,m$ متجهات مستقلة خطياً، لأن D أساس لـ W، وهذا يعني أن $\beta_{k1}=0$, $\beta_{k2}=0$, ... , $\beta_{km}=0$ من أجل $k=1,2,...,n$،وبمعنى آخر،إن $\alpha_{ij}=0$ من أجل $i=1,2,...,n$ و $j=1,2,...,m$،وبالتالي فإن المجموعة $\{f_{ij}\}_{ij}$ مستقلة خطياً.

3) إن المجموعة $\{f_{ij}\}_{ij}$ تولد الفضاء $\mathrm{Hom}(V,W)$ ، لأنه إذا كان $f\in\mathrm{Hom}(V,W)$،وكان v_i ينتمي إلى أساس V. عندئذ $f(v_i)\in W$،ولذلك فإن:

$$f\left(v_i\right)=\beta_{i1}w_1+\beta_{i2}w_2+\ldots+\beta_{im}w_m=\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}w_j$$

وإذا كان v عنصراً ما من V فإن:

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_i v_i+\ldots+\alpha_n v_n$$

ولذلك فإن:

$$f\left(v\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f\left(v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}w_j=\sum_{i,j}^{n}\alpha_i\,\beta_{ij}w_j$$
$$=\sum_{i,j}^{n}\beta_{ij}\left(\alpha_i w_j\right)=\sum_{i,j}^{n}\beta_{ij}f_{ij}\left(v\right)=\left(\sum_{i,j}^{n}\beta_{ij}f_{ij}\right)\left(v\right)$$

وهذا يعنيأن $f=\sum_{i,j}\beta_{ij}f_{ij}$، أي أن كل عنصر f من الفضاء $\mathrm{Hom}\left(V,W\right)$ هوتركيب خطي لعناصر المجموعة $\left\{T_{ij}\right\}$،وبالتالي فإن هذه المجموعة تولد $\mathrm{Hom}\left(V,W\right)$.

من 1) , 2) , 3) ينتج بأن المجموعة $\left\{f_{ij}\right\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,m}}$ تشكل أساساً لـ $\mathrm{Hom}\left(V,W\right)$،ولما كان عدد عناصر هذه المجموعة هو $n\,m$ فإن:

$$\dim\mathrm{Hom}\left(V,W\right)=n\,m=\dim V\ \dim W$$

ملاحظة(8−1):

1− نسمي الأساس $\left\{f_{ij}\right\}$ الوارد في برهان المبرهنة (8−2) بالأساس القانوني (النظامي) للفضاء المتجهي $\mathrm{Hom}\left(V,W\right)$ والمرتبط بالأساس B لـ Vو D لـ W.

2− إذا كان $V=W$ وكان $\dim V=n$ فإن $\mathrm{Hom}\left(V\right)$ هوفضاء المؤثرات الخطية على Vوبعده n^2 ، وكحالة خاصة، لدينا $\dim\mathrm{Hom}\left(F^n,F^m\right)=n\,m$.

(للفضاء $\text{Hom}(V,F)$ أهمية خاصة نراها لاحقاً ونسمي هذا الفضاء بالفضاء الثنوي للفضاء V وسنرمز له بالرمز V^* ونسمي عناصره أشكالاً خطية على V).

مثال(8−2):

نعلم أن كل حقل F هوفضاء متجهي على نفسه،وأن $\dim F=1$ ، فإذا كان $W=F$ وكان $\dim V=n$ ،وبالاعتمادعلى المبرهنة (8−2) نجد أن:

$$\dim Hom(V,F)=\dim V\ \dim F=n\cdot 1=n=\dim V$$

وعليه يكون $\text{Hom}(V,F)\cong V$.

مثال(8−3):

أوجد بعد الفضاء $\text{Hom}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$.

الحل: بما أن $\dim\mathbb{R}^3=3$, $\dim\mathbb{R}^2=2$ ،وحسب المبرهنة (8−2)، يكون لدينا:

$$\dim\text{Hom}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)=3.2=6$$

مثال(8−4):

بفرض أن $V=\mathbb{C}^3$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$. أوجد بعد الفضاء $\text{Hom}\left(V,\mathbb{R}^2\right)$.

الحل:

بما أن بعد الفضاء $V=\mathbb{C}^3$ ، باعتباره فضاءًمتجهياًعلى $\mathbb{R}$ ،يساوي 6 ،وبالتالي وحسب المبرهنة (8−2)،يكون:

$$\dim\left(\text{Hom}\left(V,R^2\right)\right)=6.2=12$$

(1–9) فضاء المؤثرات الخطية و المؤثرات الخطية العكوسة

Space of Linear Operators and Inverse Linear Operators

إن المؤثر الخطي هو تطبيق خطي من الفضاء المتجهي Vإلى نفسه، أي أن المؤثر الخطي هو تطبيق خطي من نوع خاص، أي إذا كان $f\ :V\ \to V$ تطبيقاً خطياً.فعندئذ نسمي f مؤثراً خطياً. سنرمز لفضاء المؤثرات الخطية على الفضاء المتجهي Vبـ $A\left(V\right)$ ، أو، $\mathrm{End}\left(V\right)$ بدلاً من $\mathrm{Hom}\left(V,V\right)$.

وعليه فإن المبرهنات والنتائج على فضاء المؤثرات الخطية ليست إلا حالة خاصة من المبرهنات والنتائج على فضاء التطبيقات الخطية.

مبرهنة(1–9):

ليكن Vفضاءً متجهياً، إن لمجموعة المؤثرات الخطية على V،وهي $A\left(V\right)$ الخواص الآتية:

(1) المجموعة $A\left(V\right)$ المزودة بجمع المؤثرات الخطية وضرب مؤثر خطي بعدد هي فضاء متجهي.

(2) $A\left(V\right)$ مغلقة بالنسبة لعملية تركيب المؤثرات الخطية.

إن الخواص الآتية تتحقق من أجل h,g,f من $A\left(V\right)$ و $\alpha\in K$:

$(a$ $h\left(g f\right)=\left(hg\right)f$.

$(b$ $I_v f=f=fI_v$.

$(c$ $h\left(g+f\right)=hg+hf$.

$(d$ $\left(g+f\right)h=g h+f h$.

(e $(\alpha g)f = \alpha(gf) = g(\alpha f)$.

وبالتالي فإن $A(V)$ حلقة.

مثال(9−1):

ليكن $h,f \in A(\mathbb{R}^2)$ مؤثرين خطيين معرفين بالشكل:

$$h(x,y)(x+y,0) \quad , \quad f(x,y) = (-y,x)$$

والمطلوب:

أوجد صيغة من أجل $h+f \ , 5h-3f \ , hf \ , h \ f$ ثم بين أن $h^2 = h \ , f^2 = -I$ ، حيث I هو التطبيق المطابق.

الحل:

$$\begin{aligned}(h+f)(x,y) &= h(x,y) + f(x,y) \\ &= (x+y,0) + (-y,x) \\ &= (x,x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5h-3f)(x,y) &= 5h(x,y) - 3f(x,y) \\ &= 5(x+y,0) - 3(-y,x) \\ &= (5x+8y,-3x)\end{aligned}$$

ويكون أيضاً:

$$(hf)(x,y) = h(f(x,y)) = h(-y,x) = (x-y,0)$$

$$(f\ h)(x,y) = f(h(x,y)) = f(x+y,0) = (0,x+y)$$

وأخيراً:

$$h^2(x,y) = h(h(x,y)) = h(x+y,0) = (x+y,0) = h(x,y)$$

عندئذ $L^2 = L$.

$$f^2(x,y) = f\left(f(x,y)\right) = f(-y,x) = (-x,-y) = -I(x,y)$$

عندئذ $f^2 = -I$.

تعريف(9−1):

إذا كانت $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ كثيرة حدود على الحقل F ، أي أن $a_i \in F$.عندئذ نعرف المؤثر $P(f)$ ، حيث $f \in A(V)$ بالشكل:

$$P(f) = a_0 I + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n$$

حيث I هو التطبيق المطابق، وبشكل خاص، إذا كان $P(f) = 0$ التطبيق الصفري. عندئذ نقول بأن f هو صفر كثيرة الحدود $P(x)$.

مثال(9−2):

ليكن g مؤثراً خطياً على $\mathbb{R}^3$ معرفاً بالشكل:

$$g(x,y,z) = (0,x.y)$$

أوجد $g(f)$ ، حيث $g(x) = x + 1$ ، ثم بين أن f هوجذر لـ $P(x) = x^3$.

الحل:

$$\begin{aligned} g(f)(x,y,z) &= (f + I)(x,y,z) \\ &= (0,x,y) + (x,y,z) \\ &= (x,x+y,y+z) \\ P(f)(x,y,z) &= f^3(x,y,z) \\ &= f^2\left(f(x,y,z)\right) \\ &= f^2(0,x,y) = f(0,0,x) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

وبما أن $f^3 = 0$. فإن f هو جذر لـ $P(x) = x^3$.

ملاحظة(9−1):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي V والذي بعده n على الحقل F ، يكون المؤثر الخطي f إسقاطاً للفضاء المتجهي V إذا كان $f^2 = f$.

تعريف(9−2):

نقول عن المؤثر الخطي $f : V \to V$ إنه عكوس إذا كان له معكوس، أي إذا وجد $f^{-1} \in A(V)$ ، بحيث يكون $f.f^{-1} = f^{-1}.f = I$ ، حيث I هو التطبيق المطابق.

مبرهنة(9−2):

ليكن $f : V \to V$ مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي V المنتهي البعد. عندئذ يكون f مؤثراً خطياً عكوساً إذا وفقط إذا كان نظامياً.

البرهان:

يكون المؤثر الخطي f عكوساً إذا وفقط إذا كان f متبايناً وغامراً،وفي الحالة الخاصة، إذا كان f عكوساً فإن العنصر $0 \in V$ هو العنصر الوحيد الذي يمكن أن يطبق على نفسه. أي أن f نظامي. ومن جهة أخرى إذا كان f نظامياً، أي أن $\ker f = \{0\}$ ،ومن المعلوم أن f متباين،وبالإضافة إلى ذلك،وبفرض أن V منتهي البعد،فإنه،وحسب المبرهنة (9−5) (مبرهنة البعد) يكون:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) \\ &= \dim(\operatorname{Im} f) + 0 = \dim(\operatorname{Im} f) \end{aligned}$$

وبالتالي $\operatorname{Im} f = V$. أي أن صورة f هي V،وبذلك يكون f غامراً. عندئذ f متباينوغامر ،فهو عكوس.

مثال(9−3): ليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x+z,x-z,y)$$

والمطلوب:

بين أن f مؤثر عكوس ثم أوجد صيغة f^{-1} و $f^{-1}(2,4,6)$.

الحل: حسب المبرهنة (9−2)، يكفي أن نبين أن f نظامي.

نضع $f(x,y,z)=(0,0,0)$ فنحصل على نظام منالمعادلات الخطيةالمتجانسة:

$$\begin{aligned} x+z&=0\\ x-z&=0\\ y&=0 \end{aligned}$$

والتي حلها الوحيد هو $x=y=z=0$ ، إذاً f نظاميوبذلك يكون عكوساً.

لإيجاد صيغة لـ f^{-1} نضع $f(x,y,z)=(a,b,c)$،وبالتالي يكون $f^{-1}(a,b,c)=(x,y,z)$،ويكون لدينا:

$$\begin{aligned} x+z&=a\\ x-z&=b\\ y&=c \end{aligned}$$

وبالحل من أجل z,y,x نجد أن:

$$x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \ , \ y=c \ , \ z=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$$

عندئذ:

$$f^{-1}(a,b,c)=\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \ ,c \ , \ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\right)$$

أو

$$f^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \ ,z \ , \ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$$

وباستخدام صيغة f^{-1} نجد أن:

$$f^{-1}(2,4,6)=(1+2,6,1-2)=(3,6,-1)$$

نتيجة(9−1):

بفرض أن g , f عنصران عكوسان في $A(V)$ فإن:

1) $g.f$ عكوسويكون $(gf)^{-1}=f^{-1}.g^{-1}$.

2) g^{-1} عكوس ويكون $\left(g^{-1}\right)^{-1}=g$.

البرهان:

1) لدينا

$$(g\,f)\left(f^{-1}\,g^{-1}\right)=g\left(f\;f^{-1}\right)g^{-1}=g\;I\;g^{-1}=g\;g^{-1}=I$$

ولدينا أيضاً:

$$\left(f^{-1}g^{-1}\right)(gf)=f^{-1}\left(g^{-1}g\right)f=f^{-1}I\,f=f^{-1}f=I$$

وبالتالي يكون $g\,f$ عكوساً ومعكوسه هو $f^{-1}g^{-1}$.

2) لدينا $g\,g^{-1}=g^{-1}g=I$ ،وبالتالي يكون g^{-1} عكوساً، ويكون $\left(g^{-1}\right)^{-1}=g$.

تعريف (9−3):

إذا كان V فضاءً متجهياً على حقل F ، عندئذ تشكل البنية $(A(V),+,\cdot,\circ)$ جبراً على الحقل F ، حيث $A(V)$ مجموعة غير خالية مزودة بثلاثة قوانين تشكيل (داخلي (+)وهو جمع المؤثرات، خارجي (.) مجموعة مؤثراته من الحقل Kوداخلي $(\circ)$وهو تركيب المؤثرات) بحيث إن:

a) $(A,+,\cdot)$ فضاء متجهي على F .

$(b\ (\alpha f)\circ g = f\circ(\alpha g) = \alpha(f\circ g)$ ، $\forall \alpha \in F,\ \forall\ g\ ,f\ \in A(V)$.

تعريف (9–4):

نقول عن المؤثرين $g\ ,f\ \in A(V)$ إنهما متشابهان،ونكتب $g \sim f$ إذا وجد مؤثر عكوس $P \in A(V)$ ، بحيث يكون $g = P^{-1}f\ P$.

مثال(9–4):

أثبت أن علاقة تشابه المؤثرات الخطية في $A(V)$ هي علاقة تكافؤ.

الحل:

1) إن $\sim$ انعكاسية، أي أن $f \sim f$ من أجل كل $f\ \in A(V)$.

2) إن $\sim$ متناظرة، أي إذا كان $g \sim f$ ،وهذا يكافئ $g = P^{-1}f\ P$ ، حيث P مؤثر عكوس.عندئذ P^{-1} عكوس،ولدينا $f = PgP^{-1} = (P^{-1})^{-1}\ g\ P^{-1}$ ،

وبالتالي $f \sim g$.

3) إن $\sim$ متعدية، لأنه إذا كان $g \sim h$ و $f \sim g$ ، أي $f = P^{-1}g\ P$ و $g = Q^{-1}hQ$ ، حيث $P\ ,Q$ مؤثران عكوسان،وحسب النتيجة السابقة، فإن PQ عكوسان، ويكون لدينا:

$$F = P^{-1}gP = P^{-1}(Q^{-1}hQ)P = (P^{-1}Q^{-1})h(QP) = (QP)^{-1}h(QP)$$

وهذا يعني أن $f \sim h$.

من (1) و (2) و (3) نجد بأن $\sim$ هي علاقة تكافؤ على المجموعة $A(V)$.

(1–10) التمثيل المصفوفي لمؤثر خطي

Matrix repreasation of Linear Operater

في البنود والفقرات السابقة قرنا كل تطبيق خطي f بمصفوفة $[f]_D^B$ بالنسبة للأساسين D,B، أما هنا فالحالة أبسط، لدينا $f:V\to V$ ،ويمكن أن نأخذ الأساسين D,B نفسهما في المنطلق والمستقر ،وبالتالي نقرن مؤثر خطي f بالمصفوفة المربعة $[f]_B$.

تعريف(1–10):

ليكن V فضاءً متجهياً، وليكن B أساساً له،وليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً على V ، عندئذ نسمي $[f]_B$ مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للأساس B .

وبشكل آخر، إذا كان $f:V\to V$ مؤثراً خطياً لفضاء متجهي على حقل K ،ولنفرض أن $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ أساساً لـ V.

الآن، إن المتجهات $f(e_1),\dots,f(e_n)$ هي متجهات تنتمي إلى المستقر Vوبذلك يكون كل منها تركيباً خطياً لعناصر الأساس B ، أي أن:

$$f(e_1)=a_{11}e_1+a_{12}e_2+\cdots+a_{1n}e_n$$
$$f(e_2)=a_{21}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{2n}e_n$$
$$\vdots$$
$$f(e_n)=a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+\cdots+a_{nn}e_n$$

بالتعريف، إن منقول مصفوفة المعاملات المذكورة أعلاه هو التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للأساس B ، أي أن:

$$[f]_B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(ويمكن حذف الدليل B عندما يكون الأساس معروفاً).

ملاحظة(10−1):

إذا كان $B=\{e_1,...,e_n\}$ أساساً للفضاء V على الحقل F . عندئذ،وكما نعلم، أي متجه $v\in V$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$v=a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n$$

وبالتالي يعرف المتجه الأحداثي لـ V بالنسبة للأساس B ويرمز له بالرمز:

$$[v]_B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

نؤكد هنا على أنه من المفروض أن تكون المتجهات الإحداثية متجهات عمودية إلا إذا ذكر غير ذلك.

مثال(10−1):

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y)=(2x-3y,4x+y)$$

وليكن $B=\{e_1=(1,-2),e_2=(2,-5)\}$ أساساً في $\mathbb{R}^2$ والمطلوب:

أوجد إحداثيات متجه اختياري $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بالنسبة لـ B ، ثم أوجد $f(e_1),f(e_2)$،واكتب هذين المتجهين على شكل تركيب خطي لمتجهي الأساس B ، ثم عين التمثيل المصفوفي لـ f ، أي عين $[f]_B$.

الحل:

من أجل $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يكون:

$$u=(a,b)=x\,e_1+y\,e_2=x\,(1,-2)+y\,(2,-5)$$

أو:

$$\begin{aligned} x+2y&=a\\ -2x-5y&=b \end{aligned}$$

بحل نظام المعادلات الخطي من أجل $x\,,y$ بدلالة a,b فنحصل على:

$$x=5a+2b\ ,\ y=-2a-b$$

وبالتالي:

$$(*)\ u=(a,b)=(5a+2b\ )e_1+(-2a-b)e_2$$

أو بشكل مكافىء:

$$\left[(a,b)\right]=\left[5a+2b\ ,-2a-b\right]^f$$

نوجد $f\ (e_1),f\ (e_2)$:

$$\begin{aligned} f\ (e_1)&=f\ (1,-2)=(2+6,2)=(8,2)\\ f\ (e_2)&=f\ (2,-5)=(19,3) \end{aligned}$$

لنكتب الآن المتجهين $f\ (e_1),f\ (e_2)$ كتركيب خطي لعناصر الأساس B ، حسب الصيغة $(*)$ نجد:

$$\begin{aligned} f\ (e_1)&=(8,2)=44e_1-18e_2\\ f\ (e_2)&=(19,3)=101e_1-418e_2 \end{aligned}$$

وبكتابة $f\ (e_1),f\ (e_2)$ كعمودين نحصل على التمثيل المصفوفي لـ f ، أي أن:

$$[f\ ]_B=\begin{pmatrix} 44 & 101\\ -18 & -41 \end{pmatrix}$$

ملاحظة(2−10):

من المفيد في تمثيل هذه المسائل إيجاد أولاً احداثيات متجه اختياري $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بالنسبة للأساس المعطى، لأن مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات الخطي هي نفسها في الحالتين. والهدف من ذلك هو الحصول على $x\,,y$ بدلالة a,b .

مبرهنة (1−10):

إذا كان $f:V\to V$ مؤثراً خطياً وكان $B=\{e_1,...,e_n\}$ أساساً للفضاء V من أجل أي متجه v من V فإن $[f(v)]_B=[f]_B.[v]_B$ ، حيث $[f]_B$ هوالتمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للأساس B .

البرهان:

ليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً، إذا كان $B=\{e_1,...,e_n\}$ أساساً للفضاء V وكان $v\in V$ فإن:

$$v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ne_n$$

وبالتالي:

$$f(v)=\alpha_1f(e_1)+\alpha_2f(e_2)+...+\alpha_nf(e_n)$$

وبما أن $f(e_1),f(e_2),...,f(e_n)\in V$ فإن:

$$f(e_1)=\beta_{11}e_1+\beta_{12}e_2+\cdots+\beta_{1n}e_n$$
$$f(e_2)=\beta_{21}e_1+\beta_{22}e_2+\cdots+\beta_{2n}e_n$$
$$\vdots$$
$$f(e_n)=\beta_{n1}e_1+\beta_{n2}e_2+\cdots+\beta_{nn}e_n$$

بالتبديل في (1) يكون:

$$f\left(v\right)=\alpha_1\left(\beta_{11}e_1+\beta_{12}e_2+\cdots+\beta_{1n}e_n\right)+$$
$$+\alpha_2\left(\beta_{21}e_1+\beta_{22}e_2+\cdots+\beta_{2n}e_n\right)+$$
$$+\cdots+\alpha_n\left(\beta_{n1}e_1+\beta_{n2}e_2+\cdots+\beta_{nn}e_n\right)$$
$$=\left(\alpha_1\beta_{11}+\alpha_2\beta_{21}+\cdots+\alpha_n\beta_{n1}\right)e_1+$$
$$+\left(\alpha_1\beta_{12}+\alpha_2\beta_{22}+\cdots+\alpha_n\beta_{n2}\right)e_2+$$
$$+\ldots+\left(\alpha_1\beta_{1n}+\alpha_2\beta_{2n}+\cdots+\alpha_n\beta_{nn}\right)e_n$$

وبالتالي فإن إحداثيات $T\left(v\right)$ بالنسبة للأساس B هي:

$$\left[f\left(v\right)\right]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\beta_{11}+\alpha_2\beta_{21}+\cdots+\alpha_n\beta_{n1}\\ \alpha_1\beta_{12}+\alpha_2\beta_{22}+\cdots+\alpha_n\beta_{n2}\\ \vdots\\ \alpha_1\beta_{1n}+\alpha_2\beta_{2n}+\cdots+\alpha_n\beta_{nn}\end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\left[f\left(v\right)\right]_B=\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{21}&\cdots&\beta_{n1}\\ \beta_{12}&\beta_{22}&\cdots&\beta_{n2}\\ &&\vdots&\\ \beta_{1n}&\beta_{2n}&\cdots&\beta_{nn}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

إذاً:

$$\left[f\left(v\right)\right]_B=\left[\left[f\left(e_1\right)\right]_B.\left[f\left(e_2\right)\right]_B\ldots\left[f\left(e_n\right)\right]_B\right].\left[v\right]_B$$
$$=\left[f\right]_B.\left[v\right]_B$$

مثال(10−2):

ليكن $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً،وليكن $\left[f\right]_B=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$

التمثيل المصفوفي لـ f و $B=\{(1,1)\ ,\ (1,-1)\}$، والمطلوب عين قاعدة تعريف f .

الحل:

إذا كانت $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ فإن $u=(x,y)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,-1)$، ومنه نجد أن $\alpha_1=\frac{1}{2}(x+y)\ ,\ \alpha_2=\frac{1}{2}(x-y)$، وبالتالي فإن:

$$[(x,y)]_B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(x+y)\\ \frac{1}{2}(x-y)\end{bmatrix}$$

وحسب المبرهنة (10−1)، نجد:

$$[f(x,y)]_B=[f]_B[(x,y)]_B=\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(x+y)\\ \frac{1}{2}(x-y)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3x+y\\-x+3y\end{bmatrix}$$

إذاً:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}(3x+y)(1,1)+\frac{1}{2}(-x+3y)(1,-1)\\&=(x+2y,2x-y)\end{aligned}$$

مثال(10−3):

ليكن $f:P_2\to P_2$ المؤثر الاشتقاقي المعرف بالصيغة $f(g(x))=g'(x)$.

والمطلوب 1) أوجد مصفوفة المؤثر f بالنسبة للأساس $B=\{1,x,x^2\}$ في P_2 .

2) إذا كان $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ عنصراً من P_2 فأوجد $f(g(x))$، ثم أوجد $[g(x)]_B$ و $[f(g(x))]_B$، وتحقق من صحة المبرهنة (10−1).

الحل:

1) لدينا:

$$f(1)=0=0.1+0x+0x^2$$
$$f(x)=1=1.1+0x+0x^2$$
$$f(x^2)=2x=0.1+2x+0x^2$$

وبذلك تكون المصفوفة:

$$[f]_B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

لاحظ أن المتجهات الاحداثية لـ $f(1), f(x), f(x^2)$ هي الأعمدة وليست الصفوف في $[f]_B$.

2) لنوجد $[f(g(x))]_B$، $[g(x)]_B$ بالنسبة للأساس B في P_2.

إن:

$$[g(x)]_B=[a_0,a_1,a_2]^f$$
$$[f(g(x))]_B=[a_0,2a_2,0]^f$$

وذلك بالنسبة للأساس B.

لنتحقق الآن من صحة المبرهنة(10−1). إن:

$$[f]_B[g(x)]_B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\2a_2\\0\end{bmatrix}=[f(g(x))]_B$$

وهذا يعني أن المبرهنة (10−1) محققة.

مثال(4−10):

لتكن $V = M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، وليكن $f : V \to V$ مؤثراً خطياً على V،ومعرف بواسطة $f\left(A\right) = A.M$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للأساس القانوني في V.

الحل: إن الأساس القانوني في V هو:

$$B = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

عندئذ يمكن أن نكتب:

$$f\left(E_1\right) = E_1.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + 0E_3 + 0E_4$$

$$f\left(E_2\right) = E_2.M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = cE_1 + dE_2 + 0E_3 + 0E_4$$

$$f\left(E_3\right) = E_3.M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + aE_3 + bE_4$$

$$f\left(E_4\right) = E_4.M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + cE_3 + dE_4$$

وبالتالي فإن:

$$[f]_B = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}$$

مبرهنة(2−10):

ليكن V فضاءًمتجهياً بعده n،وليكن $B = \left\{e_1, \dots, e_n\right\}$ أساساً لـ V، عندئذ:

1) التطبيق $M_B : A(V) \to M_n(F)$

والمعرف بالشكل $M_B(f) = [f]_B$

هو تماثل فضاء متجهي يحققمن أجل كل $g, f \in A(V)$, $k \in F$:

a) $M_B(gf) = M_B(g).M_B(f)$.

b) $M_B(I_v) = I_v$.

2) إذا كان $f : V \to V$ مؤثراً خطياً. فإن الشروط الآتية متكافئة:

a) f عكوس أو منتظم في الحلقة $A(V)$.

b) $M_B(f)$ مصفوفة عكوسة،وذلك مهما يكن الأساس B من V.

c) $M_B(f)$ عكوسة من أجل أساس مختار B لـ V ويكون عندها

$M_B(f^{-1}) = M_B(f)^{-1}$.

البرهان:

سوف نكتفي ببرهان البند الأول أما البند الثاني فهو منتقى من المبرهنات المذكورة على فضاء التطبيقات الخطية.

حتى نبرهن أن M_B تماثل فضاء متجهي نثبت صحة البنود الآتية:

1- بفــــرض أن $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ و $g(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} e_j$ مـــــن أجـــل $i = 1, 2, ..., n$،ولنفـــــــــــرض أن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$. فـــــــــــإن $M_B(f) = [f] = A^f$ و $M_B(g) = [g] = B^f$ ، وبما أن:

$$(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) e_j \, , \, i = 1, 2, ..., n$$

لاحظ أن $A+B$ هي المصفوفة $\left(a_{i\,j}+b_{i\,j}\right)$، وبالتالي فإن:

$$M_B\left(f+g\right)=\left[f+g\right]=\left(A+B\right)^f=A^f+B^f$$
$$=\left[f\right]+\left[g\right]=M_B\left(f\right)+M_B\left(S\right)$$

2– إن:

$$\left(k\,f\right)\left(e_i\right)=k\,f\left(e_i\right)=k\sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}\,e_j=\sum_{j=1}^{n}\left(k\,a_{i\,j}\right)e_j\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

لاحظ أن $k.A$ هي المصفوفة $\left(ka_{i\,j}\right)$، ينتج أن:

$$M_B\left(kf\right)=\left[kf\right]=\left(k\,A\right)^T=\left(k\,A\right)^T=k\left[f\right]=k\,M_B\left(f\right)$$

3– من الواضح أن M_B هوتطبيق متباين لأنه تطبيق خطي يتحدد تماماً بواسطة قيمة أساس الفضاء المتجهي. كما أنه غامر وذلك لأن كل مصفوفة $A\in M_n\left(F\right)$ (من المستقر) هي صورة للمؤثر الخطي:

$$f\left(e_i\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}\,e_j\ ;\ i=1,2,\ldots,n$$

حيث $\left(a_{i\,j}\right)$ هي منقول المصفوفة A. ومن (1) و (2)و (3) نجد أن M_B هو تماثل فضاء متجهي. لنثبت أن التطبيق M_B يحقق: (a

$$\left(g\circ f\right)\left(e_i\right)=g\left(f\left(e_i\right)\right)$$
$$=g\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}\,e_j\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{j\,k}\,e_k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}\,b_{j\,k}\right)e_k\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

نتذكر بأن $A.B$ هي المصفوفة $A.B=\left(c_{ik}\right)$ ، حيث $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,b_{jk}$، ومما سبق ينتج:

$$\left[g\circ f\right]=\left(AB\right)^{f}=B^{f}A^{f}=\left[g\right]\left[f\right]$$

b) بما أن M_B تماثل فضاء متجهي فإن:

$$M_B\left(I_V\right)=I_n$$

مثال(5−10):

ليكن $B=\left\{v_1=(1,3),v_2=(2,5)\right\}$ أساساً في $\mathbb{R}^2$ والتطبيقان الخطيان $f,g\in A\left(\mathbb{R}^2\right)$ المعرفان بالشكل:

$$f\left(x,y\right)=\left(3x-4y,x+5y\right),\quad g\left(x,y\right)=\left(2y,3x-y\right)$$

والمطلوب:

1− أوجد إحداثيات متجه اختياري $\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^2$ بالنسبة للأساس B .

2− أجد التمثيل المصفوفي $\left[f\right],\left[g\right]$ بالنسبة للأساس B .

3− بين أن:

$$\left[f\right]+\left[g\right]=\left[f+g\right]$$
$$\left[g\circ f\right]=\left[g\right]\left[f\right]$$

ثم أثبت أن $\left[4f\right]=4\left[f\right]$.

الحل:

1) لنكتب المتجه $\left(a,b\right)$ كتركيب خطي بالنسبة لمتجهات الأساس v_1,v_2 وذلك باستخدام المجهولين x,y :

$$(a,b)=x\,(1,3)+y\,(2,5)$$

أو :

$$\begin{aligned} x+2y&=a\\ 3x+5y&=b \end{aligned}$$

بحل نظام المعادلات الخطي من أجل $x\,,y$ بدلالة a,b فنحصل على:

$$x=2b-5a\ ,\ y=3a-b$$

إذاً:

$$(a,b)=(2b-5a)v_1+(3a-b)v_2$$

أوبشكلمكافىء $\left[(a,b)\right]=\left[2b-5a\ ,\ 3a-b\right]^T$ نستخدم هذه الصيغة في (2) و (3) .

2)لنوجد التمثيل المصفوفي لـ $[f]\,,[g]$ بالنسبة للأساس B . إن:

$$\left.\begin{aligned} f(v_1)&=f(1,3)=(-9,16)=77v_1-43v_2\\ f(v_2)&=f(2,5)=(-14,27)=124v_1-69v_2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow[f]=\begin{bmatrix}77&124\\-43&-69\end{bmatrix}$$

وإن:

$$\left.\begin{aligned} g(v_1)&=g(1,3)=(6,0)=-30v_1+18v_2\\ g(v_2)&=g(2,5)=(10,1)=-48v_1+29v_2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow[g]=\begin{bmatrix}-30&-48\\18&29\end{bmatrix}$$

3) لنوجد المصفوفة $[g+f]$:

$$\begin{aligned} (g+f)(v_1)&=g(v_1)+f(v_1)=(-30\,v_1+18\,v_2)+(77\,v_1-43\,v_2)\\ &=47\,v_1-25\,v_2\\ (g+f)(v_2)&=g(v_2)+f(v_2)=(-48\,v_1+29\,v_2)+(124\,v_1-69\,v_2)\\ &=76\,v_1-40\,v_2 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$[g+f]=\begin{bmatrix}47 & 76\\ -25 & -40\end{bmatrix}$$

لنتحقق من أن $[g+f]=[g]+[f]$. يمكن أن نكتب:

$$[g]+[f]=\begin{bmatrix}-30 & -48\\ 18 & 29\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}77 & 124\\ -43 & -69\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47 & 76\\ -25 & -40\end{bmatrix}=[g+f]$$

الآن، لنبين أن $[g\circ f]=[g][f]$:

$$(g\circ f)(v_1)=g\left(f\left(v_1\right)\right)=g\left(-9,16\right)=\left(32,-43\right)=-246\,v_1+139\,v_2$$

$$(g\circ f)(v_2)=g\left(f\left(v_2\right)\right)=g\left(-14,27\right)=\left(54,-69\right)=-408\,v_1+231\,v_2$$

ومنه فإن المصفوفة $[g\circ f]$ هي:

$$[g\circ f]=\begin{bmatrix}-246 & -408\\ 139 & 231\end{bmatrix}$$

لنتحقق الآن من المساواة:

$$[g][f]=\begin{bmatrix}-30 & -48\\ 18 & 29\end{bmatrix}\begin{bmatrix}77 & 124\\ -43 & -69\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-246 & -408\\ 139 & 231\end{bmatrix}=[g\circ f]$$

لإثبات أن $[4f]=4[f]$ نوجد أولاً مصفوفة لـ $[4f]$:

$$(4f)(v_1)=4f\left(v_1\right)=4\left(77\,v_1-43\,v_2\right)=308\,v_1-172\,v_2$$

$$(4f)(v_2)=4f\left(v_2\right)=4\left(124\,v_1-69\,v_2\right)=496\,v_1-276\,v_2.$$

ومنه فإن:

$$[4f]=\begin{bmatrix}308 & 496\\ -172 & -276\end{bmatrix}$$

ومن ناحية أخرى نجد:

$$[4f] = 4\begin{bmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 308 & 496 \\ -172 & -276 \end{bmatrix} = [4f]$$

أي أن

$$4[f] = [4f].$$

(1−11) تغيير الأساس لمؤثر خطي

Change the Basis of Linear Operater

لقد درسنا في مقرر الجبر الخطي (1) تأثير تغيير الأساس على المتجهات الاحداثية في فضاء متجهي،وفي هذا القسم سوف نناقش تأثير تغيير الأساس على التمثيل المصفوفي لمؤثر خطي،وسوف نستخدم المبرهنتين الآتيتين:

مبرهنة(1−11): ليكن V فضاءً متجهياً منتهي البعد،وليكن كل من A,B أساساً له. إذا كان $f:V\to V$ مؤثراً خطياً. فإنّ:

$$[f]_A = P^{-1}[f]P$$

حيث إن P− هي مصفوفة الانتقال من الأساس A إلى الأساس B (انظر الجبر الخطي (1)) وهي مصفوفة مربعة من المرتبة nتكتب بدلالة أعمدتها. فإذا كان v متجهاً من V عندئذ يمكن أن نكتب:

$$(1)\ [v]_B = P[v]_A$$

هذا من جهة،ومن جهة أخرى فإن المبرهنة (1−10) تعطينا:

$$(2)\ [f(v)]_A = [f]_A[v]_A\ ,\ \forall v\in V$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد:

$$P\,[f\,]_A\,[v\,]_A = P.\big[f\,(v\,)\big]_A = \big[f\,(v\,)\big]_B$$
$$= [f\,]_B\,[v\,]_B = [f\,]_B\,P\,[v\,]_A$$

وبالتالي ينتج:

$$P\,[f\,]_A = [f\,]_B\,P$$

وبما أن P عكوسة، لأنها مصفوفة انتقال (انظر جبر خطي (1))،فإن:

$$[f\,]_A = P^{-1}.[f\,]_B\,.P$$

مثال(1−11): ليكن $f\;:\;\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثراً خطياً معرفاً بالعلاقة:

$$f\,(x\,,y\,,z\,) = (x\,+3y\,+2z\,,x\,-4z\,,y\,+3z\,)$$

ولنرمز بـ A للأساس القانوني (النظامي) لـ $\mathbb{R}^2$، ولنأخذ:

$$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

أساساً آخر في $\mathbb{R}^2$. والمطلوب:

أوجد مصفوفة P عكوسة بحيث يتحقق:

$$P^{-1}[f\,]_A\,P = [f\,]_B$$

الحل:

باستخدام المبرهنة (1−11)، لنوجد أولاً $[f\,]_A$. بما أن A هي أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^2$ نكتب معاملات $x\,,y\,,z$ على شكل صفوف فنحصل على:

$$[f\,]_A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

كما أن التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للأساس B هو:

$$f\ (1,1,1)=(6,-3,4)=4(1,1,1)-7(1,1,0)+9(1,0,0)$$
$$f\ (1,1,0)=(4,1,1)=1(1,1,1)+0(1,1,0)+3(1,0,0)$$
$$f\ (1,0,0)=(1,1,0)=0(1,1,1)+1(1,1,0)+0(1,0,0)$$

هذا يعني أن:

$$[f\ ]_B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ -7 & 0 & 1\\ 9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

وبذلك يكون:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

وبحسب المبرهنة (11−1) نجد أن:

$$[f\ ]_B=P^{-1}[f\ ]_A\ P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ -7 & 0 & 1\\ 9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

مبرهنة(11−2):

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n على الحقل F، وليكن $\{e_1,...,e_n\}$ أساساً لـ K^n. عندئذ التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة لأساس معطاه المصفوفة $B=P^{-1}.A.P$، حيث P هي المصفوفة التي أعمدتها $e_1,e_2,...,e_n$ على الترتيب.

البرهان:

إن التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للأساس المعتاد لـ F^n يكون المصفوفة A نفسها، أيضاً. تكون P مصفوفة الانتقال من الأساس المعتاد إلى الأساس المعطى، إذاً وحسب المبرهنة (11−1) يكون $B = P^{-1}.A.P$ التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للأساس المعطى.

مثال (11−2):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$، وليكن B التمثيل المصفوفي الخطي $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ بالنسبة للأساس $\{(1,4),(2,9)\}$. أوجد B.

الحل:

بالاعتماد علىالمبرهنة (11−2) نجد:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 & 487 \\ -98 & -217 \end{bmatrix}$$

مثال(11−3):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من المرتبة n، وليكن B التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي بالنسبة للأساس $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$، أوجد B.

الحل:

إن المصفوفة P المذكورة أعلاه هي مصفوفة الانتقال من الأساس لقانوني في $\mathbb{R}^3$ إلى الأساس المعطى. عندئذ:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -5 & -9 & -12 \\ 7 & 15 & 24 \end{bmatrix}$$

مثال(4−11):

ليكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ المؤثر المرافق، حيث $\mathbb{C}$ هوالحقل المركب والذي هو فضاء متجهي علـــى الحقـــل $\mathbb{R}$. أوجـــد التمثيـــل المصـــفوفي لـــ f بالنســـبة للأســـاس $B=\{1+4i \ \ , \ 2+9i\}$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

ليكن الأساس القانوني $E=\{1,i\}$ لـ $\mathbb{C}$. وبما أن $f(1)=1\ ,\ f(i)=-i$ فإن:

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة الانتقال من الأساس E إلى الأساس B أيضاً:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

ولدينا $P^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

وبذلك يكون:

$$[f]_B = P^{-1}[f]_E\,P = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 36 \\ -8 & -17 \end{bmatrix}$$

(1−12) التشابه

Similarity

تعريف (1−12):

لتكن A , B مصفوفتين مربعتين، عندئذ نقول إن المصفوفة B تشابه A إذا وجدت مصفوفة عكوسة P بحيث يكون $B = P^{-1}.A.P$.

ملاحظة(1−12):

يمكن إعادة كتابةالمعادلة $B = P^{-1}.A.P$ بالصورة $(1-12)$، $A = P\ .B.P^{-1}$، أو، $A = \left(P^{-1}\right)^{-1}.B.P^{-1}$، وبوضع $Q = P^{-1}$ نجد أن $A = Q^{-1}.B.Q$،وهذا يعني أن A تشابه B، وبالتالي نستطيع القول إن A , B متشابهتان.

إن تشابه المصفوفات هي علاقة تكافؤ لأن:

1) إن A مشابهة لـ A من أجل أي مصفوفة مربعة A لأن المصفوفة الواحدية I_n هي مصفوفة عكوسة،ولدينا $I_n^{-1} = I_n$،وبما أن $A = I_n^{-1}A = I_n$، فإن A مشابهة لـ A.

2) إذا كانت A مشابهة لـ B فإن B مشابهة لـ A.

تبرهن كما في الملاحظة (1−12).

3) إذا كانت A مشابهة لـ Bو B مشابهة لـ C فإن A مشابهة لـ C.

بما أن A مشابهة لـ B فإنه توجد مصفوفة عكوسة P، بحيث يكون $A = P^{-1}B\,P$، وبما أن B مشابهة لـ Cفإنه توجد مصفوفة عكوسة Q، بحيث يكون $B = Q^{-1}C\,Q$، وبالتالي:

$$A = P^{-1}B\,P = P^{-1}\left(Q^{-1}C\,Q\right)P = (QP)^{-1}C\,(QP)$$

وبذلك تكون QP عكوسة. عندئذ A مشابهة لـ C.

ملاحظة(12−2):

بما أن تشابه المصفوفات هي علاقة تكافؤ فإن جميع المصفوفات المربعة n تتجزأ إلى صفوف تكافؤ لمصفوفات متشابهة.

مبرهنة(12−1):

ليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً على الفضاء V المنتهي البعد. ولتكن A هي مصفوفة f بالنسبة للأساس B، وA' هي مصفوفة f بالنسبة للأساس B'، عندئذ:

$$A' = P^{-1}A\,P$$

حيث P هي مصفوفة الإنتقال من B' إلى B (وهذا يعني أن أي مصفوفتين تمثلان نفس المؤثر الخطي $f:V\to V$ بالنسبة لأساسين مختلفين تكونان متشابهتين).

البرهان:

لإثبات هذه المبرهنة سيكون من المناسب أن نصف العلاقة $Au=v$ سهمياً بالشكل $u\xrightarrow{A}v$، حيث A هي مصفوفة f بالنسبة للأساس B، وA' هي مصفوفة f بالنسبة إلى B'. عندئذتتحقق العلاقتين الآتيتينمن أجل أي x من V (حسب المبرهنة (1−10)):

$$\left[f(v)\right]_B = A\left[v\right]_B$$

$$\left[f(v)\right]_{B'} = A'\left[v\right]_{B'}$$

$$\left[v\right]_B \xrightarrow{A} B\left[f(v)\right]_B \qquad (1)$$
$$\left[v\right]_{B`} \xrightarrow{A`} B\left[f(v)\right]_{B`}$$

ويمكن كتابتهما بالشكل:

لمعرفة كيف ترتبط المصفوفتان A، A'. نعتبر أن P هي مصفوفة الإنتقال من الأساس B' إلى الأساس B فتكون P^{-1} هي مصفوفة الإنتقال من B إلى B'، فيكون:

$$P\left[v\right]_{B'}=\left[v\right]_B$$

ويكون أيضاً:

$$P^{-1}\left[f\left(v\right)\right]_B=\left[f\left(v\right)\right]_{B'}$$

ويمكن كتابتهما أيضاً بالشكل:

$$(2)\quad \begin{array}{l} \left[v\right]_{B'}\xrightarrow{P}\left[v\right]_B \\ \left[f\left(v\right)\right]_B\xrightarrow{P^{-1}}\left[f\left(v\right)\right]_{B'} \end{array}$$

ويمكن ربط العلاقتين (1) , (2) معاً في مخطط واحد كما يأتي:

$$\begin{array}{ccc} \left[v\right]_B & \xrightarrow{A} & \left[f\left(v\right)\right]_B \\ P\uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ \left[v\right]_{B'} & \xrightarrow{A'} & \left[f\left(v\right)\right]_{B'} \end{array}$$

يوضح هذا الشكل أنه توجد طريقتان للحصول على المصفوفة $\left[f\left(v\right)\right]_{B'}$ من المصفوفة $\left[v\right]_B$، يمكننا أن نأخذ المسار الأسفل عبر الشكل، وهذا يعني:

$$(3)\ A'\left[v\right]_{B'}=\left[f\left(v\right)\right]_{B'}$$

أو يمكن أن نذهب إلى الأعلى من الطرف الأيسر ثم عبر القمة إلى أسفل الطرف الأيمن، وهذا يعني أن:

$$(4)\ P^{-1}A\,P\left[v\right]_{B'}=\left[f\left(v\right)\right]_{B'}$$

ينتج من (3), (4) أن:

$$(4)\ P^{-1}A\,P\,[v]_{B'} = A'[v]_{B'}$$

لكل $v \in V$. ومن المساواة الأخيرة ينتج أن:

$$A' = P^{-1}A\,P$$

ملاحظة(12−3):

يجب أن لا ننسبأن P هي مصفوفة الإنتقال من الأساس B' إلى الأساس Bوأن P^{-1} هي مصفوفة الإنتقال من B إلى B'.

مثال(12−1):

ليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y) = (x+y, -2x+4y)$$

والمطلوب: أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر f. أي مصفوفة f بالنسبة للأساس $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ثم استخدام المبرهنة (12−1) لتطبيق هذه المصفوفة إلى مصفوفة f بالنسبة للأساس $B' = \{u_1 = (1,1), u_2 = (1,2)\}$.

الحل:

إن صيغة f هي:

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,-2) = 1.e_1 - 2e_2$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (1,4) = 1.e_1 + 4e_2$$

وعليه فإن المصفوفة القانونية لـ T هي:

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

نحتاج بعد ذلك إلى مصفوفة الإنتقال من الأساس B' إلى الأساس B:

$$\left.\begin{matrix} u_1 = 1.e_1 + 2e_2 \\ u_2 = 1.e_1 + 1e_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن مقلوب هذه المصفوفة:

$$P^{-1} = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن المبرهنة (12−1) تكون مصفوفة f بالنسبة للأساس B':

$$P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(13−1) أثر مؤثر خطي ومحدده

Trace and Diterminant of Linear Operater

تعريف(13−1):

إذا كانت $A = \left[a_{i\,j}\right]$ مصفوفة مربعة من المرتبة n، عندئذ يكون أثر المصفوفة A هو مجموع عناصر قطرها الرئيسي، أي أن $tr\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$.

مبرهنة(13−1):

إذا كانت $A = \left[a_{i\,j}\right]_n$ و$B = \left[b_{i\,j}\right]_n$ مصفوفتان مربعتان من المرتبة n عندئذ:

1− إن $tr\left(A.B\right) = tr\left(B.A\right)$ من أجل أي مصفوفتين A, B.

2− إذا كانت المصفوفة B مشابهة لـ A فإن $tr\left(A\right) = tr\left(B\right)$.

البرهان:

1) إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$، $B=\left[b_{ij}\right]$. فإن $A.B=\left[c_{ik}\right]$، حيث $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$،ويكون بذلك:

$$tr\left(BA\right)=\sum_{j=1}^{n}d_{jj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}Q_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=tr\left(AB\right)$$

2) إذا كانت المصفوفة B مشابهة لـ A، فإنه توجد مصفوفة عكوسة P، بحيث يكون $A=P^{-1}.B.P$،وحسب البند السابق يكون:

$$tr\left(A\right)=tr\left(P^{-1}BP\right)=tr\left(BP^{-1}P\right)=tr\left(B\right)$$

تعريف(13−2):

1− ليكن المؤثر الخطي $f:V\to V$. عندئذنعرف أثر المؤثر الخطي بالشكل $tr\left(f\right)=tr\left(\left[f\right]\right)$، حيث $\left[f\right]$ أي تمثيل مصفوفي لـ f.

2− نرمز لمحدد المؤثر الخطي f بالرمز $\det\left(f\right)$، ويعرف بالعلاقة $\det\left(f\right)=\det\left(\left[f\right]\right)$، حيث $\left[f\right]$ أي تمثيل مصفوفي لـ f.

نتيجة(13−1):

1− إن كل المصفوفات المتشابهة لها الأثر نفسه (حسب المبرهنة $(13-1)$) وبذلك يكون لكل التمثيلات المصفوفة لـ f الأثر نفسه.

2−بما أن للمصفوفات المتشابهة المحدد نفسه، فإن أي تمثيل مصفوفي لـ fسيعطينا القيمة المحدديةنفسها.

مثال(13−1):

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاًبالعلاقة:

$$f(x,y)=(2y,3x-y)$$

والمطلوب:

1− أوجد أثر f.

2− هل يمكننا أن نحصل على قيمة أخرى من أجل $tr(f)$وذلك باختيار أساس آخر ؟

3−أوجد محدد f.

4− هل يمكننا الحصول على قيمة أخرى من أجل $\det f$ وذلك باختيار أساس آخر ؟

الحل:

1− نوجد تمثيلاً مصفوفياً لـ f باختيار الأساس القانوني، أي $B=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$، ومنه:

$$f(e_1)=(0,3)=0e_1+3e_2$$
$$f(e_2)=(2,-1)=2e_1-1e_2$$

وبالتالي فإن:

$$[f]_B=\begin{bmatrix}0&2\\3&-1\end{bmatrix}$$

عندئذ $t_r(f)=t_r([f])=-1$.

2− لا يمكن ذلك لأن كل التمثيلات المصفوفية لـ T متشابهةوبالتالي يكون لجميعها الأثر نفسه الذي يساوي -1.

3–بالنسبة للأساس القانونييكون $[f]=\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$،وبالتالي:

$$\det(f)=\begin{vmatrix}0 & 2\\3 & -1\end{vmatrix}=-6$$

4–لا يمكن ذلك لأن كل التمثيلات المصفوفية لـ f متشابهة. وبالتالي سيكون لها القيمة المحددية نفسها والتي تساوي -6.

مثال(2–13):

ليكن $\mathbb{C}$، حيث $\mathbb{C}$ هو الحقل المركب، فضاءً متجهياًعلى الحقل $\mathbb{R}$، حيث $\mathbb{R}$ هو الحقل الحقيقي، وليكن f المؤثر المرافق على $\mathbb{C}$، أي أن $f(z)=\bar{z}$ أوجد أثر ومحدد f.

الحل:

بما أن:

$$f(1)=1=1.1+0i$$
$$f(i)=-i=0.1-i$$

فيكون لدينا:

$$[f]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

بالنسبة للأساس القانوني $\{1,i\}$ لـ $\mathbb{C}$ على $\mathbb{R}$. عندئذ:

$$\det(f)=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}=-1$$

كما أن:

$$tr(f)=tr\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=1-1=0$$

تمارين محلولة

1– ليكن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل $f(x,y,z)=x+y+z$. أثبت أن f تطبيق خطي.

الحل:

ليكن $u=(x_1,y_1,z_1)\,,v=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$. عندئذ:

$$f(u+v)=f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2$$
$$=(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2)=f(u)+f(v)$$

أياً كان $k\in\mathbb{R}$ فإن $ku=(kx_1,ky_1,kz_1)$، إذاً:

$$f(ku)=f(kx_1,ky_1,kz_1)=kx_1+ky_1+kz_1=k(x_1+y_1+z_1)=k\,f(u)$$

و منه فإن f تطبيق خطي.

2–إذا كان $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً بالشكل $f(x,y)=(x^2,y)$. أثبت أن f ليس خطياً.

الحل:

ليكن $u=(1,2)$، و $k=3$. إذاً $ku=(3,6)$، ولدينا $f(u)=(1,2)$، وبذلك يكون $kf(u)=(3,6)$. إذاً $f(ku)=f(3,6)=(9,6)\neq k\,f(u)$. ينتج من ذلك أن f ليس خطياً.

3–ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل $f(x,y)=|x+y|$. بيّن أن f ليس خطياً.

الحل:

ليكن $u=(2,3)$، و $k=-1$. عندئذ $ku=(-2,-3)$. لدينا $f(u)=2+3=5$ وبالتالي $kT(u)=(-1)5=5$. إذاً:

$$f(ku)=f(-2,-3)=|-2-3|=|-5|=5\neq kf(u)$$

وبذلك f ليس خطياً.

4- ليكن $f:P_2\to P_2$ تطبيقاً معرفاً بالشكل:

$$f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3=xg(x)$$

بيّن أن f خطي.

الحل:

لاحظ أن f عبارة عن جداء ضرب الحدود $g(x)$ بـ x. أي أن:

$$f(g(x))=xg(x)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}f(g(x)+h(x))&=x(g(x)+h(x))=xg(x)+xh(x)\\&=f(g(x))+f(h(x))\end{aligned}$$

كما أن:

$$f(k(g(x)))=x(kg(x))=k(xg(x))=kf(g(x))$$

من أجل أي عدد $k\in K$.

5- ليكن $f:M_{n\times n}(\mathbb{R})\to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ تطبيقاً معرفاً بالشكل:

$$f\left(A\right)=A^{f}+A$$

الحل:

لنفرض أن $A,B\in M_{n\times n}$، وأن $\alpha\in\mathbb{R}$، فإن:

$$f\left(A+B\right)=\left(A+B\right)^{f}+\left(A+B\right)=\left(A^{f}+A\right)+\left(B^{f}+B\right)=f\left(A\right)+f\left(B\right)$$

ويكون أيضاً:

$$f\left(\alpha A\right)=\left(\alpha A\right)^{f}+\alpha A=\alpha\left(A^{f}+A\right)=\alpha f\left(A\right)$$

و مما سبق ينتج أن f تطبيق خطي.

6− برهن أن التطبيق الآتيهو تطبيق خطي:

$$f:\mathbb{R}^{2}\rightarrow\mathbb{R}^{3}:\ f\left(x,y\right)=\left(2x,x+y,x-2y\right)$$

الحل:

لنفرض أن $v=\left(x_1,y_1\right)\in\mathbb{R}^{2}$, $u=\left(x,y\right)$، وأن $\alpha\in\mathbb{R}$. عندئذ:

(1

$$\begin{aligned}f\left(u+v\right)&=f\left(x+x_1,y+y_1\right)\\&=\left(2x+2x_1,x+x_1+y+y_1,\left(x+x_1\right)-2\left(y+y_1\right)\right)\\&=\left(2x,x+y,x-2y\right)+\left(2x_1,x_1+y_1,x_1-2y_1\right)\\&=f\left(u\right)+f\left(v\right)\end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned}f\left(\alpha u\right)&=f\left(\alpha x,\alpha y\right)\\&=\left(2\alpha x,\alpha x+\alpha y,\alpha x-2\alpha y\right)\\&=\alpha\left(2x,x+yx-2y\right)\\&=\alpha f\left(x,y\right)=\alpha f\left(u\right)\end{aligned}$$

من (1) و (2) نجد أن f تطبيق خطي.

7- ليكن $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً، ولنفرض أن:

$$f(0,0,1)=(4,-7) \quad , \; f(1,0,0)=(1,1) \quad , \quad f(0,1,0)=(3,0)$$

و المطلوب:

1) أوجد مصفوفة f القانونية.

2) أوجد $f(1,3,8)$.

3) أوجد صيغة لـ f (قاعدة اقتران).

الحل:

1) لإيجاد المصفوفة القانونية لـ f يكون لدينا:

$$\begin{aligned} f(1,0,0)&=(1,1)=1(1,0)+1(0,1) \\ f(0,10)&=(3,0)=3(1,0)+0(0,1) \\ f(0,0,1)&=(4,-7)=4(1,0)-7(0,1) \end{aligned}$$

ومنه:

$$[f]=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

2) بما أن $(1,3,8) \in \mathbb{R}^3$، ومنه فإن :

$(1,3,8)=1(1,0,0)+3(0,1,0)+8(0,0,1)$، وحسب المبرهنة (3-4) نجد أن:

$$\begin{aligned} f\ (1,3,8) &= 1(1,0,0)+3(0,1,0)+8(0,0,1) \\ &= 1(1,1)+3(3,0)+8(4,-7) \\ &= (42,-55) \end{aligned}$$

3)الآن، إذا كان $u=(x,y,z)\ni\mathbb{R}^3$، فإن:

$$u=(x,y,z)=x\ (1,0,0)+y\ (0,1,0)+z\ (0,0,1)$$

وحسب المبرهنة (3−4)، نجد:

$$\begin{aligned} f\ (x,y,z) &= xf\ (1,0,0)+yf\ (0,1,0)+zf\ (0,0,1) \\ &= x\ (1,1)+y\ (3,0)+z\ (4,-7) \\ &= (x+3y+4z\ ,x-7z\ ) \end{aligned}$$

8− ليكن $S=\{v_1=(1,1,1),v_2=(1,1,0),v_3=(1,0,0)\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$، وليكن $f\ :\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً، بحيث يكون:

$$f\ (v_1)=(1,0)\quad ,\quad f\ (v_2)=(2,-1)\quad ,f\ (v_3)=(4,3)$$

أوجد $f\ (2,-3,5)$.

الحل:

نكتب $v=(2,-3,5)$ على شكل تركيب خطي لعناصر الأساس Sفيكون:

$$(2,-3,5)=\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,0,0)$$

و منه نستنتج نظام المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} &\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2 \\ &\alpha_1+\alpha_2=-3 \\ &\alpha_1=5 \end{aligned}$$

وبالحل نجد $\alpha_1=5\quad ,\quad \alpha_2=-8\quad ,\quad \alpha_3=5$. عندئذ:

$$(2,-3,5)=5(1,1,1)-8(1,1,0)+5(1,0,0)$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(2,-3,5) &= 5f(v_1)-8f(v_2)+5f(v_3) \\ &= 5(1,0)-8(2,-1)+5(4,3) \\ &= (9,23) \end{aligned}$$

9- ليكن $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z,t)=(x+y,y+z,z+t,t+x)$$

والمطلوب: أوجد أساس وبُعد كلٍ من نواة وصورة المؤثر الخطي f.

الحل:

$$(x.y,z,t)\in\ker f \Leftrightarrow f(x.y,z,t)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \\ z+t &= 0 \\ t+x &= 0 \end{aligned}$$

و بحل هذا النظام نجد $(x.y,z,t)=\alpha(-1,1,-1,1)$، حيث $\alpha\in\mathbb{R}$، وبالتالي فإن:

$$\ker f=\{\alpha(-1,1,-1,1);\ \ \alpha\in\mathbb{R}\}$$

ولهذا فإن أساس النواة هو $\{(-1,1,-1,1)\}$، ومن ثم فإن $\dim f=1$. وللحصول على أساس الفضاء $\operatorname{Im} f$ نعتمدفي البداية المبرهنة(5-2) من أجل إيجاد مجموعة مولدة وذلك بأخذ الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^4$. لدينا:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0,0)=(1,0,0,1) \\ f(e_2) &= f(0,1,0,0)=(1,1,0,0) \\ f(e_3) &= f(0,0,1,0)=(0,1,1,0) \\ f(e_4) &= f(0,0,0,1)=(0,0,1,1) \end{aligned}$$

ولهذا فإن $\{(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$ تولِّد $\operatorname{Im} f$ ، والآن هل هذه المجموعة مستقلة خطياً؟ نضع المتجهات السابقة على شكل مصفوفة كما يأتي:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

و بإجراء التحويلات الأولية على صفوف المصفوفة A نحصل على الشكل الدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A وهو:

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ولذا فإن أساس الفضاء $\operatorname{Im} f$ هو $\{(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}$، ومن ثم فإن $\dim \operatorname{Im} f=3$.

10- أوجد أساس وبُعد كل منواة و صورة التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ المعرف بالشكل $f(v)=Av$، حيث:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&-1&3\\1&2&-3\\0&3&-6\end{bmatrix}$$

ثم تحقق من مبرهنة البُعد.

الحل:

نلاحظ أن $Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \ker f$، وباستخدام التحويلات الأولية لحل هذا النظام، نجد أن الشكلالدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A هو:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن:

$$2x_1 + 2x_3 = 0$$
$$x_2 - 2x_3 = 0$$

و بوضع $x_3 = \alpha$ نجد $x_2 = 2\alpha$ و $x_1 = -\alpha$، وبالتالي يكون:

$$\ker f = \{\alpha(-1,2,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

إذاً $\{(-1,2,1)\}$هو أساس الفضاء $\ker f$، ويكون بذلك $\dim \ker f = 1$. لإيجاد أساس الفضاء $\operatorname{Im} f$ نوجد أولاً صورة عناصر الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ فنحصل على:

$$f(e_1) = (2,1,1,0)$$
$$f(e_2) = (1,-1,2,3)$$
$$f(e_3) = (0,3,-3,-6)$$

إن هذه ما هي إلا أعمدة المصفوفة A ولذا فإننا نستخدم الشكل الدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A لنحصل على الأساس $\{(2,1,1,0),(1,-1,2,3)\}$للفضاء $\operatorname{Im} f$، ولذلك فإن $\dim \operatorname{Im} f = 2$، وحسب المبرهنة (3−5)نجد أن:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + 2 = 3$$

وهو بُعد الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$ لـ f.

11–عيّن تطبيقاً خطياً $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$، بحيث تكون صورته مولدة بالمتجهين $(4,5,6)$, $(1,2,3)$.

الحل:

ليكن $\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني لـ . $\mathbb{R}^3$، ولنضع $f(e_1)=(4,5,6)$, $f(e_2)=(1,2,3)$، وحسب المبرهنة (4–3) فإن f موجود ووحيد، وبالإضافة إلى ذلك فإن صورة f تولد $f(e_1)$, $f(e_2)$، وبالتالي يكون لـ f الخاصة المطلوبة. نبحث عن صيغة عامة من أجل $f(x,y,z)$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= f(x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3)\\
&= x\,f(e_1) + y\,f(e_2) + z\,f(e_3)\\
&= x\,(4,5,6) + y\,(1,2,3) + z\,(0,0,0)\\
f(x,y,z) &= (4x+y, 5x+2y, 6x+3y)
\end{aligned}
$$

12– ليكن $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z,t) = (x+y, y+z, z+t, t+x)$$

هل f نظامي، فإذا كان غير نظامي. عندئذ أوجد $v \neq 0$، حيث $f(v)=0$.

الحل: لنضع

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z,t) &= (0,0,0,0)\\
\Rightarrow \quad x+y &= 0\\
y+z &= 0\\
z+t &= 0\\
t+x &= 0
\end{aligned}
$$

وبالحل نجد:

$$x+y=0$$
$$y+z=0$$
$$z+t=0$$

و بما أن t متغير حر (ثانوي) فإنه للنظام السابق حل مغاير للحل الصفري، وبذلك يكون f غير نظامي، ولإيجاده نضع $t=1$ فنحصل على $v=(-1,1,-1,1)$، بحيث إن $f(v)=0$.

13- اضرب مثالاً لتطبيق غير خطي $f:V\to U$، بحيث إن $f^{-1}(0)=0$، و f غير متباين.

الحل:

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل $f(x)=x^2$. عندئذ $f^{-1}(0)=0$، ولكن $f(3)=f(-3)=9$، أي أن f ليس متبايناً.

14- ليكن التطبيق الخطي غير الشاذ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ والمعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(3x+y,-2x-4y+3z,5x+4y-2z)$$

والمطلوب أوجد صيغة لـ f^{-1}.

الحل:

نضع $f(x,y,z)=(a,b,c)$، ومنه فإن $(x,y,z)=f^{-1}(a,b,c)$، وبالحل من أجل x,y,z بدلالة a,b,c، أي:

$$3x+y=a$$
$$-2x-4y+3z=b$$
$$5x+4y-2z=c$$

أو (بإجراء التحويلات الأولية) نحصل على النظام المكافىء:

$$\begin{aligned} x-3y+3z &= a+b \\ -10y+9z &= 3b+2a \\ z &= 10c-12a+7b \end{aligned}$$

نوجد الحل من أجل x,y,z فنحصل على:

$$z=-12a+7b+10c\,,\quad y=-11a+6b+9c\,,\quad x=4a-2b-3c$$

عندئذ:

$$f^{-1}(a,b,c)=(4a-2b-3c,-11a+6b+9c,-12a+7b+10c)$$

باستبدال x,y,z بـ a,b,c على الترتيب نحصل على:

$$f^{-1}(x,y,z)=(4x-2y-3z,-11x+6y+9z\ ,-12x+7y+10z)$$

15–ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,)=(2x-y,x+y)$$

1) أوجد صيغة من أجل f^2 ، f^3

2) أوجد $g(f)$ ، حيث $g(x)=x^2-3x+4$. هل f جذر لـ $g(x)$ ؟

3) إذا كان $h(x)=x^2-3x+3$. هل f جذر لـ $h(x)$.

الحل:

1)

$$\begin{aligned} f^2(x,y)=f(f(x,y))&=f(2x-y,x+y) \\ &=[2(2x-y)-(x+y),2x-y+x+y] \\ &=(4x-2y-x-y,3x)=(3x-3y,3y) \end{aligned}$$

و من أجل f^3:

$$f^3(x,y)=f\left(f^2(x,y)\right)=f\left(3x-3y,3y\right)$$
$$=\left[2(3x-3y)-3x,3x-3y+3x\right]$$
$$=(6x-6y-3x,6x-3y)=(3x-6y,6x-3y)$$

2)بما أن $g(x)=x^2-3x+4$ ، و $g(f)=f^2-3f+4I$. عندئذ:

$$g(f)(x,y)=\left(f^2-3f+4I\right)(x,y)$$
$$=f^2(x,y)-3f(x,y)+4I(x,y)$$
$$=(3x-3y,3x)+(-6x+3y,-3x-3y)+(4x,4y)$$
$$=(x,y)$$

إن f ليس جذراً لكثيرة الحدود $g(x)=x^2-3x+4$ ، لأن $g(f)$ لا يساوي التطبيق الخطي الصفري.

3)بما أن $h(f)=f^2-3f+3I$. فإن:

$$h(f)(x,y)=\left(f^2-3f+3I\right)(x,y)$$
$$=f^2(x,y)-3f(x,y)+3I(x,y)$$
$$=(3x-3y,3x)+(-6z+3y,-3x-3y)+(3x,3y)$$
$$=(0,0)$$

إن f جذر لـ $h(x)=x^2-3x+3$ ،وذلك لأن $h(f)=0$.

16– ليكن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x-3y-2z,y-4z,z)$$

و المطلوب:

1) بيّن أن f عكوس.

2) أوجد صيغة من أجل f^{-1} ، ثم أوجد $f^{-1}(1,2,3)$.

3) أوجد صيغة من أجل f^{-2}.

الحل:

لنبيّن أن f نظامي. نضع $f(x,y,z)=(0,0,0)$، فنحصل على نظام المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\left.\begin{aligned} x-3y-2z&=0\\ y-4z&=0\\ z&=0 \end{aligned}\right\}$$

و منه فإن $x=y=z=0$، وبالتالي يكون f نظامي، أي أن f عكوس.

2) نضع $f(x,y,z)=(r,s,t)$ فنحصل على:

$$\begin{aligned} x-3y-2z&=r\\ y-4z&=s\\ z&=t \end{aligned}$$

بالحل من أجل x,y,z بدلالة r,s,t فنجد:

$$\begin{aligned} x&=r+3s+14t\\ y&=s+4t\\ z&=t \end{aligned}$$

و بذلك يكون:

$$f^{-1}(r,s,t)=(r+3s+14t,s+4t,t)$$

أو:

$$f^{-1}(x,y,z)=(x+3y+14z,y+4z,z)$$

إن $(49,14,3)$ $f^{-1}(1,2,3)=(1+6+42,2+12,3)$.

3)من أجل الحصول على صيغة لـ f^{-2} نطبق f^{-1} مرتين فنحصل على:

$$f^{-2}(r,s,t)=f^{-1}(r+3s+14t,s+4t,t)$$
$$=[r+3s+14t+3s+12t+14t,s+4t+4t,t]$$
$$=(r+6s+40t,s+8t,t)$$

17– لنفرض أن f,g عنصران عكوسان في $A(V)$. المطلوب بيّن أن fg عكوس أيضاً، وأن $(fg)^{-1}=g^{-1}f^{-1}$.

الحل:

بما أن:

$$(fg)(g^{-1}f^{-1})=f(gg^{-1})f^{-1}$$
$$=f.I.f^{-1}=I$$

$$(g^{-1}.f^{-1})(fg)=g^{-1}(f^{-1}.f)g=g^{-1}.I.g=g^{-1}g=I$$

وبالتالي يكون fg عكوساً ومعكوسه هو $g^{-1}.f^{-1}$.

18– ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y)=(x+3y,2x-y)$$

ليكن $S=\{u_1=(2.1),u_2=(3,2)\}$ أساساً لـ $\mathbb{R}^2$. والمطلوب:

1) أوجد إحداثيات متجه اختياري $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بالنسبة لـ S.

2) أوجد التمثيل المصفوفي لـ f.

الحل:

1) لدينا:

$$(a,b)=x(2,1)+y(3,2)$$

أو:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=a \\ x+2y&=b \end{aligned}\right\}$$

و بحل النظام السابق نجد أن:

$$x=2a-3b$$
$$y=-a+2b$$

و بذلك يكون:

$$(a,b)=(2a-3b)u_1+(-a+2b)u_2$$

وبشكل مكافىء يكون $[(a,b)]=[2a-3b,-a+2b]S$.

2) سوف نستخدم الصيغة السابقة من أجل كتابة $T(u_1),T(u_2)$على شكل تركيب خطي لعناصر الأساس S.

$$T(u_1)=T(2,1)=(5,3)=1u_1+1u_2$$

$$T(u_2)=T(3,2)=(7,4)=2u_1+1u_2$$

و بكتابة إحداثيات $T(u_1),T(u_2)$ كعمودين نجد:

$$[T]=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

19- لتكن لدينا المجموعة $S=\{1,t,e^t,te^t\}$ التي تشكل أساساً لفضاء متجهي V للدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، وليكن D المؤثر الاشتقاقي على V، أي أن:

$$Df={}^{df}\!/_{dt}$$

والمطلوب أوجد مصفوفة D بالنسبة للأساس S.

الحل:

بما أن:

$$D(1)=0=0(1)+0(t)+0(e^t)+0(te^t)$$
$$D(t)=1=1(1)+0(t)+0(e^t)+0(te^t)$$
$$D(e^t)=e^t=0(1)+0(t)+1(e^t)+0(te^t)$$
$$D(te^t)=e^t+te^t=0(1)+0(t)+1(e^t)+1(te^t)$$

و بذلك تكون مصفوفة D بالنسبة للأساس المعطى:

$$[D]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

20- ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً، ولتكن $[f]_B=\begin{pmatrix}-2&-3\\3&5\end{pmatrix}$،حيث $B=\{(1,1),(1,2)\}$. والمطلوب عين قاعدة تعريف f.

الحل:

بما أن:

$$(x,y)=\alpha_1(1,1),\alpha_2(1,2)$$

وبالحل نجد:

$$\alpha_1=-y+2x,\alpha_2=y-x$$

ومنه فإن:

$$\left[\left(x,y\right)\right]=\begin{pmatrix}-y+2x\\ y-x\end{pmatrix}$$

و بالتالي:

$$\left[f\left(x,y\right)\right]_B=\left[f\right]_B.\left[\left(x,y\right)\right]_B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 3 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-y+2x\\ y-x\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2y-4x-3y+3x\\ -3y+6x+5y-5x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y-x\\ 2y+x\end{bmatrix}$$

إذاً:

$$f\left(x,y\right)=\left(-y-x\right)\left(1,1\right)+\left(2y+x\right)\left(1,2\right)=\left(y,3y+x\right)$$

أي أن قاعدة تعريف المؤثر الخطي f هي:

21- إذا كان $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ f\left(x,y,z\right)=\left(2x-y,y+z,z-3x\right)$

وكان $B' =\left\{\left(1,1,0\right),\left(1,0,1\right),\left(0,1,0\right)\right\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$، وكان B هو الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ فعين كلاً من P (مصفوفة الانتقال من الأساس B' إلى الأساس B)، و $\left[f\right]_B,\left[f\right]_{B'}$. ثم تحقق من العلاقة الواردة في المبرهنة (11-1).

الحل:

إن:

$$\left[T\right]_{B'}=\left[\left[f\left(1,1,0\right)\right]_{B'}\middle|\left[f\left(1,0,1\right)\right]_{B'}\middle|\left[f\left(0,1,0\right)\right]_{B'}\right]$$
$$=\left[\left[\left(1,1,-3\right)\right]_{B'}\middle|\left[\left(2,1,-2\right)\right]_{B'}\middle|\left[\left(-1,1,0\right)\right]_{B'}\right]$$
$$=\begin{bmatrix}4 & 4 & -1\\ -3 & -2 & 0\\ -3 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$[f]_B = \left[[f(1,0,0)]_B \middle| [f(0,1,0)]_B \middle| [f(0,0,1)]_B \right]$$
$$= \left[[(2,0,-3)]_B \middle| [(-1,1,0)]_B \middle| [(0,1,1)]_B \right]$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن السهل التحقق من أن:

$$[T]_{B'} = P^{-1}.[f]_B .P$$

22- ليكن مؤثراً خطياً، ولتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ المصفوفة القانونية للمؤثر الخطي f.

عين مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للأساس:

$$B = \{(1,2,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$$

الحل:

إن المصفوفة P الآتية هي مصفوفة تغير الأساس من الأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ إلى

الأساس المعطى B (أو نقول مصفوفة الانتقال من الأساس B الى الأساس القانوني)،

أي:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وحسب المبرهنة(11-1) يكون:

$$B = P^{-1}.A.P$$

إن:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -2/4 & 2/4 & -2/4 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن:

$$=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -2/4 & 2/4 & -2/4 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=P^{-1}\cdot A\cdot P$$

23− ليكن $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$T(x,y)=(x+2y,3x-4y)$$

والمطلوبأوجد المصفوفة القانونية للمؤثر الخطي f.أي f بالنسبة للأساس $B=\{(1,0),(0,1)\}$ومن ثم استخدم المبرهنة(12−1) لتحويل هذه المصفوفة إلى مصفوفة f بالنسبة للأساس:

$$B'=\{(1,1),(1,-1)\}$$

الحل:

بما أن:

$$f(1,0)=(1,3)=1(1,0)+3(0,1)$$
$$f(0,1)=(2,-4)=2(1,0)-4(0,1)$$

ومن المصفوفة القانونية نجد أن:

$$[f]_B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

نحتاج بعد ذلك إلى مصفوفة الانتقال من الأساس B' إلى الأساس B، وبذلك نحصل على:

$$\left.\begin{matrix}(1,1)=1(1,0)+1(0,1)\\ (1,-1)=1(1,0)-1(0,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن مقلوب المصفوفة P هي:

$$P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

وحسب المبرهنة (12−1) تكون مصفوفة T بالنسبة لـ B' هي:

$$[f]_{B'}=P^{-1}.[f]_B.P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$

24− ليكن $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x+2y+z,x+5y,z)$$

والمطلوب أوجد محدد و أثر المؤثر الخطي f.

الحل:

نوجد التمثيل المصفوفيل. f بالنسبة للأساس القانوني وذلك بكتابة معاملات x,y,z كصفوف فنحصل على:

$$[f]=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\det(f)=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&5&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1(3)=3$$

ويكون:

$$tr(f)=tr\begin{bmatrix}1&2&1\\1&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}=1+5+1=7$$

$$\left\{E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$f(E_1)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&o\\c&o\end{pmatrix}=aE_1+0E_2+cE_3+0E_4$$

$$f(E_2)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=0E_1+aE_2+0E_3+cE_4$$

$$f(E_3)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=bE_1+0E_2+dE_3+0E_4$$

$$f(E_4)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=0E_1+bE_2+0E_3+dE_4$$

25–لنفرض أن f هوالمؤثر الخطي على الفضاء $V = M_{2\times2}(K)$ للمصفوفة المربعة من المرتبة 2 فوق الحقل K. والمعرف بواسطة $f(A) = M.A$، حيث $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. أوجد $\det(f)$، ثم أوجد $tr(f)$.

الحل:

نوجد تمثيلاً مصفوفياً لـ f بالنسبة لأساس ما في V، وليكن الأساس القانوني، وبذلك يكون:

$$[f] = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\det(f) = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$= a,d\,(ad - bc) - bc\,(ad - bc)$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc$$

$$tr(f) = tr\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix} = 2a + 2d$$

تمارين غير محلولة

– في التمارين من (1) إلى (22) بيّن أياً من التطبيقات المبينة هو تطبيق خطي.

(1)، حيث $f(x,y)=(2x,y)$.

(2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$،حيث $f(x,y)=(2x,x+y,x-2y)$.

(3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$، حيث $f(x,y,z)=x+y-2z$.

(4)، حيث $f(x,y,z)=(xy,y,x-z)$.

(5) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$، حيث $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

(6)، حيث $f(p(x))=xp(x)$.

(7) $f:P_2\to P_3$، حيث $f(p(x))=xp(x)$.

(8) $f:P_n\to\mathbb{R}$، حيث $f(p(x))=p(0)$.

(9) $f:P_2\to P_3$، حيث $f(ax^2+bx+c)=2ax+b$.

(10) $f:P_3\to P_3$، حيث:

$$f(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=(a_0+a_2)-(a_1+2a_3)x^2$$

(11) $f:M_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$، حيث $f(A)=\det A$

(12) $f:M_{n\times n}(\mathbb{R})\to M_{n\times n}(\mathbb{R})$، حيث $f(A)=A.A^{-1}$

(13) $f:P_2\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$، حيث:

$$f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\begin{bmatrix} a_0 & -a_2 \\ -a_2 & a_0-a_1 \end{bmatrix}$$

(14) $f:P_2\to P_2$، حيث $f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\left(a_0+1\right)+a_1x+a_2x^2$.

(15) $f:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$، حيث $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=a+d$.

(16) $f:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$، حيث:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=a^2+b^2$$

(17) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$، حيث

$f(x,y,z)=\left(2x+3y-z,2+x+y,3|x-3z|\right)$.

(18) $f:V=c[a,b]\to\mathbb{R}$، حيث $f\left(g(x)\right)=g\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(19) $f:c[a,b]\to c[a,b]$، حيث $f\left(g(x)\right)=\int_a^x g^2(x)dx$.

إن V في مجموعة التمارين الأتيةعبارة عن فضاء المتجهات المكونات من جميع الدوال التي مجالها $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات.

(20) $g:V\to\mathbb{R}$، حيث $f\left(g(x)\right)=g'(2)$.

(21) $f:V\to\mathbb{R}$، حيث $f\left(g(x)\right)=g'(0)+3$.

(22) $f:V\to\mathbb{R}$، حيث $f\left(g(x)\right)=g''(x)+4+\int_{-2}^x 3g(x)dx$.

2- إذا كا ن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً بحيث إن $f(1,1)=(1,-2)$، و $f(1,0)=(-4,1)$. أوجد صيغة $f(x,y)$.

3- إذا كان $f:V\to\mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً، وكان $v_1,v_2,v_3\in V$، حيث:

$$f(v_3)=(-3,1,2),f(v_2)=(0,3,2),f(v_1)=(1,-1,2)$$

احسب $f(2v_1-3v_2+4v_3)$.

4- إذا كان $f:P_2\to P_2$ تطبيقاً خطياً بحيث إن:

$$f(x^2)=x^2,f(x+1)=0,f(x-1)=x$$

احسب $f(x^2+x+1)$، ثم عين $f(a_0+a_1x+a_2x^2)$.

5- إذا كان $f:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ تطبيقاً خطياً، بحيث إن:

$$f\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=0,f\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=0,f\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=-1,f\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=3$$

احسب $f\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)$.

6-ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً عندئذ:

(أ) إذا كان U فضاءً جزئياً من V. أثبت أن $f(U)$ فضاء جزئي من W.

(ب) إذا كان U فضاءً جزئياً من W. أثبت أن $f^{-1}(U)$ فضاء جزئي من V.

7- ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، وليكن $v_1,...,v_n\in V$.

(أ) إذا كانت $\{f(v_1),...,f(v_n)\}$ متجهات مستقلة خطياً. أثبت أن $\{v_1,..v_n\}$ مستقلة خطياً.

(ب)أثبت أن عكس الفقرة (أ) ليس صحيحاً بالضرورة.

8- في التمارين من (1)إلى (8) أوجد أساس وبُعد كلٍ من نواة وصورة التطبيق الخطي f وتحقق من مبرهنة البّعد.

(1) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2,x_1-4x_3,2x_3+4x_4)$$

(2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة:

$$f(x,y,z)=(x+y,0,x+y)$$

(3) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+3x_2-3x_3+5x_4$$

(4) $f_A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$، التطبيق المصفوفي حيث:

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&1&0\\-1&1&0&-1\\2&-1&0&4\\1&-2&0&0\end{bmatrix}$$

(5) $f:P_2\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ المعرف بالشكل:

$$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=\begin{bmatrix}a_1&a_2-a_1\\a_2+a_1&3a_1-a_0\end{bmatrix}$$

(6) $f:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ المعرف بالشكل $f(A)=XA$، حيث:

$$X=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&2\end{bmatrix}$$

(7) $f:P_2\to P_3$ و المعرف بالشكل $f(p(x))=x^2p'(x)$.

(8) $f:P_2\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالشكل $f(p(x))=(p(0),p(1))$.

9– بيّن أياً من التطبيقات الخطية في التمارين من (1) إلى (8) السابقة متباين وأيّها غامر.

10– لتكن C مصفوفة مربعة من المرتبة m ولها معكوس (مصفوفة نظامية) والمطلوب:

أثبت أن التطبيق الخطي $f : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}$ والمعرف بالشكل $T(A) = C.A$، لكل $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ هو تطبيق متباين وغامر.

11– ليكن:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + c = b + d \right\}$$

وليكن $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالقاعدة:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + c - b - d$$

و المطلوب: أثبت أن f تطبيق خطي غامر وأن $\ker f = V$، ثم استنتج أن V فضاء جزئي من $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ وإن بُعده يساوي 3.

12– ليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ معرفاً بالشكل:

$$f(x, y) = (0, 2x + 3y)$$

هل التطبيق f نظامي؟ فإذا كان غير ذلك. عندئذ أوجد $v \neq 0$ بحيث يكون $f(v) \neq 0$.

13– أوجد صيغة لـ f^{-1}، حيث $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي نظامي معرفٌ بالشكل:

$$f(x, y, z) = (3x + y, -2x - 4y + 3z, 5x + 4y - 2z)$$

14–أثبت أن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالشكل:

$$f\left(x,y,z,t\right)=\left(-y,x-z,z,-t\right)$$

تماثل (ايزومورفيزم) ثم أوجد صيغة f^{-1}.

15–ليكن $f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ التطبيق الخطي المصفوفي. بيّن إذا كان f_A تماثلاً أم لا،فإذا كان تماثلاً. عندئذ أوجد صيغة f_A^{-1}، حيث:

(أ) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

(ب) $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(جـ) $A=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$.

16– إذا كان $f:P_3\to P_3$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f\left(p\left(x\right)\right)=p\left(x-3\right)$$

والمطلوب: عيّن $\ker f$ وبيّن فيما إذا كان f تماثلاً.

17– ليكن $f:P_n\to P_n$ التطبيق المعرف بالشكل:

$$f\left(p\left(x\right)\right)=p\left(x\right)+xp'\left(x\right)$$

و المطلوب:

(أ) أثبت أن T تطبيق خطي.

(ب) أثبت أن $\ker f=\{0\}$، ومن ثم فإن f تماثل.

18–لتكن التطبيقات الخطية $h:\mathbb{R}^2\to R^2$ ، $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ، $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ والمعرفة كما يلي:

$$f(x,y,z)=(2y,x+z)\,,\;g(x,y,z)=(x-z,y)\,,\;h(x,y,z)=(2y,x)$$

ولتكن المتجهات $w=(2,3,1)$, $v=(2,-1,3)$. والمطلوب:

1- أوجد $(f+g)(v)$, $(f+g)(w)$،ثم أوجد صيغة من أجل $f+g$.

2- أوجد $(h\circ f)(v)$, $(g\circ g)(w)$، ثم أوجد صيغة من أجل $h+g$ و $h\circ(f+g)$و $h\circ f+h\circ g$. ماذا تستنتج.

19– إذا كان كلٍ من $h:V\to W$, $g:W\to V$تطبيقاً خطياً. أثبت أن:

(a) $\ker f\subseteq\ker g\circ h$

(b) $\operatorname{Im} g\circ h\subseteq\operatorname{Im} g$

(c) إذا كان $g\circ h$متبايناً فإن h متباين كما أن $\dim V\le\dim W$.

(d) إذا كان $g\circ h$ غامراً فإن g غامر كما أن $\dim V\le\dim W$.

20– ليكن $f,g\in A(\mathbb{R}^2)$ مؤثرين خطيين معرفين بالعلاقتين:

$$g(x,y)=(0,x)\quad,\quad f(x,y)=(y,x)$$

أوجد صيغة لكلٍ مما يلي:

$$g^2,\;f^2,\;gf\;,\;fg\;,\;2f-3g\;,\;f+g$$

ثم بيّن أن $g^2=g$.

21– ليكن المؤثر الخطي f على $\mathbb{R}^2$ المعرف بالشكل:

$$f(x,y)=(x+2y,3x+4y)$$

والمطلوب: أوجد $g(f)$، حيث $g(x)=x^2-5x+2$ وبيّن فيما إذا كان f جذراً لـ $g(x)$.

22– بيّن أن المؤثر الخطي f على $\mathbb{R}^3$ المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x,4x-y,3y-z)$$

عكوس، ثم أوجد صيغة من أجل f^{-1} , f^{-2} واحسب $f^{-1}(2,3,4)$.

أعد الطلبات السابقة من أجل المؤثر الخطي :

$$f(x,y,z)=(x-3y-2z,y-4z,z).$$

23– ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y)=(2x-5y,3x+y)$$

وليكن $B=\{u_1=(2,1),u_2=(3,2)\}$ أساساً لـ $\mathbb{R}^2$.

أوجد إحداثيات متجه اختياري $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بالنسبة للأساس B، ثم أوجد $f(u_1)$, $f(u_2)$ واكتبها كتركيبين خطيين في u_1 , u_2 وأوجد التمثيل المصفوفة لـ f بالنسبة للأساس B.

24– أعد حل التمرين السابق من أجل المؤثر الخطي f في $\mathbb{R}^2$ المعرف بالصيغة:

$$f(x,y)=(3x-4,x+5y)$$

بالنسبة للأساس B نفسه.

25–ليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً، وليكن $B=\{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\}$ أساساً للفضاء V، حيث:

$$[f]_B=\begin{bmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & 5 & -1\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

احسب $f(3v_1-4v_2)$.

26– ليكن كل من $B=\{e_1 , e_2 , e_3 , e_4\}$ و $C=\{e'_1 , e'_2 , e'_3 , e'_4\}$

أساساً للفضاء المتجهي V وليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً يحقق:

$$\begin{aligned}
f(e_1)&=2e_1-3e_3+e_4,\\
f(e_2)&=4e_1-4e_4,\\
f(e_3)&=e_1+4e_4,\\
f(e_4)&=5e_1+e_2-e_4.
\end{aligned}$$

و المطلوب:

1) أوجد $[f]_B$

2) إذا كان

$e'_1=e_1-2e_2+e_3+e_4$ ، $e'_2=e_2-e_3-3e_4$ ، $e'_3=e_3+5e_4$ ، $e'_4=e_4$.

عين مصفوفة p ، بحيث يكون $P[v]_C=[v]_B$ ، لكل $v\in V$.

3) أوجد $[f]_c$.

4) اكتب $f(e'_1)$ كتركيب خطي للمتجهات e'_j.

27–ليكن V فضاءًمتجهياً، ولتكن كل من $B=\{e_1 , e_2 , e_3\}$

و $C=\{e'_1 , e'_2 , e'_3\}$ أساساً للفضاء V، وليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً، حيث:

$$f(e_1)=e_1-3e_3 , f(e_2)=2e_2+5e_3 , f(e_3)=2e_1+7e_2+e_3$$

$$\begin{aligned}
&e'_1=2e_1-e_2 , e'_2=-e_1+e_2 , e'_3=-e_1+e_3\\
&e_1=e'_1+e'_2 , e_2=e'_1+2e'_2 , e_3=e'_1+e'_2+e'_3
\end{aligned}$$

والمطلوب:

1) أوجد $[f]_B$.

2) عين مصفوفة قابلة للعكس p تحقق $[f]_C = p^{-1}.[f]_B.p$.

3) أوجد $[f]_C$.

28–ليكن $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ مؤثراً خطياً، ولتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القانونية للمؤثر f. احسب $[f]_B$،حيث B هو الأساس:

$$B = \{(1,1,1,2)\ ,\ (3,3,4,8),\ (3,4,3,6),\ (0,1,0,1)\}$$

29– ليكن $f:P_2 \to P_2$مؤثراً خطياً، وليكن كلٍ من:

$C = \{1+x^2, 1-x^2, 2x\}$ و$B = \{1, 1-x, x-x^2\}$

أساساً للفضاء P_2. إذا كان:

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب $[f]_C$.

30– ليكن $f:P_2 \to P_2$ مؤثراً خطياً وليكن:

$$B = \{3x+3x^2, -1+3x+2x^2, 3+7x+2x^2\}$$

أساساً للفضاء P_2، حيث:

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

و المطلوب:

1- احسب $[f(v)]_B$، لكل $v \in B$.

2- احسب $f(v)$، لكل $v \in B$.

3- عين قاعدة تعريف f واحسب $f(1+x^2)$.

31- في التمارين من (1) إلى (3) عين مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للأساس بالنسبة لـ B أولاً ومن ثم بالنسبة لـ C ثم اوجد مصفوفة الانتقال من C إلى Bوتحقق من صحة المبرهنة (2-1).

(1) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$، حيث $f(x,y,z)=(x+y-z,x-y,y-z)$، بالنسبة للأساسين:

$$B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\},\ C=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$$

(2) $f:P_1 \to P_1$، حي ث $f(a+bx)=(a-b)+(2a-b)x$، بالنسبة للأساسين:

$$B=\{1+x,1-x\},\ C=\{x,x-1\}$$

(3) $f:P_2 \to P_2$، حيث $f(a+bx+cx^2)=c+ax+bx^2$، بالنسبة للأساسين:

$$B=\{1-x,1+x,x^2\},\ C=\{x,1-x,1+x^2\}$$

32- ليكن $B=\{1,e^x,e^{2x}\}$ أساساً للفضاء الجزئي V من فضاء الدوال القابلة

للإشتقاق على $\mathbb{R}$.وليكن $f:V\to V$ المؤثر الخطي المعرف بالشكل

$f\left(g\left(x\right)\right)=g'\left(x\right)$. والمطلوب: احسب $[f]_B$.

33– أعد التمرين السابق من أجل $B=\left\{e^{2x},xe^{2x},x^2e^{2x}\right\}$.

34– في التمارين من (1) إلى (3) أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للأساس B، واستخدم المبرهنة(12–1)لحساب مصفوفة f بالنسبة للأساس B'.

$(1)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1+7x_2,3x_1-4x_2\right)$$

حيث:

$$B'=\left\{v_1=(1,3),\ v_2=(-1,-1)\right\},\ B=\left\{u_1=(2,2),u_2=(4,-1)\right\}$$

$(2)\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x+2y-z,-y,x+7z\right)$$

حيث B هو الأساس القانوني و

$B'=\left\{v_1=(1,0,0),v_2=(1,1,0),v_3=(1,1,1)\right\}$.

$(3)\ f:P_1\to P_1$ مؤثر خطي معرف بالشكل $f\left(a_0+a_1x\right)=a_0+a_1\left(x+1\right)$، حيث:

$B=\left\{p_1=6+3x,p_2=10+2x\right\}$ و $B'=\left\{q_1=2,q_2=3+2x\right\}$.

35– a– أثبت أنه إذا كانت A,B مصفوفتين متشابهتين فإن $\det A=\det B$.

b– أثبت أن المصفوفات المتشابهة لها نفس المرتبة.

c– أثبت أنه إذا كانت A,B مصفوفتين متشابهتين فإن A^2,B^2 تكونان متشابهتين أيضاً وبصورة عامة أثبت أن A^k,B^k متشابهتين، حيث k عدد صحيح موجب.

36– أوجد محدد وأثر جميع المؤثرات الخطية الواردة في التمرين 35.

الفصل الثاني

كثيرة الحدود المميزة وكثيرة الحدود الأصغرية

إن الكثير من تطبيقات الجبر الخطي يتطلب إيجاد مصفوفة غير صفرية x بحيث يكون $Ax = \lambda x$ حيث A مصفوفة مربعة و $\lambda \in \Re$. تعرف هذه المسألة بمسألة القيم الذاتية وتعتبر ثاني أهم مسائل الجبر الخطي (بعد حلول أنظمة المعادلات الخطية) إن لهذه المسألة أهمية كبيرة من الناحيتين الرياضية والتطبيقية، فهي تشكل إحدى أهم الركائز للرياضيات ولأنواع العلوم الأخرى ، مثل الاهتزازات والمرونة والفيزياء النووية والميكانيك والهندسة الكيميائية وعلم الأحياء... الخ.

(1-2) مفاهيم أساسية وتعاريف:

إن من أهم المسائل في موضوع الفضاءات المتجهية والمؤثرات الخطية عليها مسألة إيجاد المتجهات { v_i } من الفضاء المتجهي V المعرف فوق الحقل العددي K والتي من أجلها تتحقق العلاقة:

$$T(v_i) = \lambda v_i \quad ; v_i \neq 0 \quad , \lambda \in K$$

حيث أن T هو مؤثر خطي على الفضاء المتجهي V.

إن لهذه المسألة أهمية بالغة من الناحيتين الرياضية والتطبيقية حيث أنها تشكل إحدى أهم الركائز للرياضيات في العديد من أنواع العلوم الأخرى كالاهتزازات والمرونة والفيزياء النووية والميكانيك والهندسة الكيميائية وعلم الأحياء ..... الخ.

تعريف (1-1):

نسمي التعبير التالي:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

كثيرة حدود بالمتحول x، حيث إن $a_0, a_1, \ldots, a_n$ أعداد من الحقل العددي K تسمى أمثال (معاملات) كثيرة الحدود $f(x)$، و n عدد صحيح موجب يسمى درجة كثيرة الحدود $f(x)$ بالرمز $\deg f(x)$.

مثال (1-1):

$$f(x) = 5x^2 + 3x - 1$$

كثيرة حدود من الدرجة الثانية

ومن أجل n=1 نحصل على كثيرة الحدود من الدرجة الأولى.

مثال (1-2):

$$f\ (x)\ =\ 4\,x\ +\ 6$$

كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

ومن أجل n = 0 نحصل على كثيرة الحدود من الدرجة صفر وهو في الحقيقة مجرد عدد لا يساوي الصفر

مثال (1-3):

$$f(x)\ =\ -8$$

كثيرة حدود من الدرجة صفر.

أما إذا كان العدد في الحالة السابقة هو الصفر فإن كثيرة الحدود في هذه الحالة تسمى كثيرة الحدود الصفرية والتي تكون فيها أمثال كل قوى x مساوية للصفر.

مثال (1-4):

$$f(x)\ =\ 0\,x^n\ +\ 0\,x^{n-1}\ +\ ...\ +\ 0\,x\ +\ 0\ =\ 0$$

هي كثيرة الحدود الصفري

ملاحظة (1-1):

ليس لكثيرة الحدود الصفري درجة.

عند تبديل كل x في كثيرة الحدود $f(x)$ بالعدد a نحصل على ما يسمى القيمة العددية لكثيرة الحدود $f(x)$ من أجل $x\ =\ a$ (أو عند $x\ =\ a$) أو كثيرة الحدود بالعدد a ويرمز له بالرمز $f(a)$:

$$f(a) = a_n\,.a^n + a_{n-1}\,.a^{n-1} + \ldots + a_1\,.\,a + a_0$$

مثال (1-5):

إذا كان:

$$f(x) = 2\,x^2 - 5\,x + 7$$

فإن:

$$f(2) = 2(2)^2 - 5(2) + 7 = 5$$

وإن:

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 5(-1) + 7 = 14$$

تعريف (1-2):

يقال إن كثيرتي الحدود $g(x)$ ، $f(x)$ متطابقتان إذا تساوت أمثال قوى x المتماثلة فيهما.

مثال (1-6):

إذا كان كثيرة الحدود:

$$f(x) = 7x^3 - x + 4$$

$$g(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$$

متطابقتين فإن ذلك يعني أن:

$$a = 7 \ , \ b = 0 \ , \ c = -1 \ , \ d = 4$$

(2–2) العمليات على كثيرات الحدود

1- جمع كثيرات الحدود:

ليكن:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

كثيرتي حدود بالمتحول x من الدرجة n و m على الترتيب.

إن مجموعهما $f(x) + g(x)$ هو كثيرة حدود بالمتحول x درجته لا تتجاوز أكبر الدرجتين n أو m,وأمثال قوى x فيه هي حاصل جمع أمثال قوى x المتماثلة في $f(x)$ و $g(x)$.

مثال (2-1):

إذا كان:

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 1$$

$$g(x) = 3x^3 - x^2 - 3$$

فإن مجموعهما يكون:

$$f(x) + g(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

إن عملية الجمع هذه، تحقق الخواص المعروفة لعملية جمع الأعداد ،وهي التبديل ،والتجميع ،و وجود عنصر حيادي هو كثيرة الحدود الصفري ،وكذلك وجود كثير حدود نظير أمثاله هي نظيرات أمثال كثيرة الحدود المفروضة.

2- جداء كثيرات الحدود:

إن الجداء $f(x) . g(x)$ لكثيرتي الحدود المعرفتين في الفقرة السابقة هو كثيرة حدود بالمتحول x درجتها تساوي مجموع درجتي $f(x)$ و $g(x)$ أي تساوي m + n ويتم الحصول عليه بضرب كل حد من حدود $f(x)$ بكل حد من حدود $g(x)$،ثم نأخذ المجموع الجبري لنواتج الضرب.

مثال (2-2):

بالعودة إلى المثال السابق نجد أن:

$$f(x) . g(x) = -6x^5 + 9x^4 + 3x^3 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 6x^2 - 9x - 3$$
$$= -6x^5 + 7x^4 - 7x^2 - 9x + 3$$

ملاحظة (2-1):

ينعدم الجداء $f(x) . g(x)$ عندما وفقط عندما ينعدم أحد مضروبيه $f(x)$ أو $g(x)$ على الأقل، كما وتحقق عملية الضرب هذه الخواص المشابهة لعملية ضرب الأعداد وهي التبديل والتجميع و وجود عنصر حيادي بالنسبة لعملية الضرب ،وهو 1 والذي هو كثير حدود من الدرجة صفر.

مبرهنة (2-1):

لا يوجد مقلوب لأي كثيرة حدود سوى لكثيرة الحدود من الدرجة صفر. بكلام أخر يكون لكثيرة الحدود غير الصفري $f(x)$ من الحلقة $K[x]$ مقلوب $g(x)$ في $k[x]$ عندما وفقط عندما تكون درجة $f(x)$ مساوية للصفر.

البرهان:

لزوم الشرط: بفرض أنه يوجد كثيرة الحدود $g(x)$ من $k[x]$ بحيث يكون:

$$f(x) . g(x) = 1$$

عندئذ يكون:

$$\deg (f(x) . g(x)) = 0$$

ومن جهة أخرى:

$$\deg (f(x) . g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

من العلاقتين السابقتين نجد أن:

$$\deg f(x) + \deg g(x) = 0$$

وبما أن $\deg f(x)$ و $\deg g(x)$ أكبر أو يساوي الصفر فإننا نستنتج من العلاقة الأخيرة أن:

$$\deg f(x) = \deg g(x) = 0$$

كفاية الشرط:

إذا كانت $\deg f(x) = 0$ فإن $f(x)$ كثيرة حدود ثابت أي أن:

$$f(x) = a \quad ; a \in k$$

وبما أن $a \neq 0$ (لأن $f(x)$ غير صفري) فإن a يملك مقلوباً a^{-1} في k،أي أنه يوجد كثيرة الحدود الثابت:

$$g(x) = a^{-1} \in k[x]$$

بحيث يكون:

$$f(x) . g(x) = 1$$

ملاحظة (2-2):

إن هذه النتيجة تبين أن $k[x]$ منطقة تكاملية وليست حقلاً.

مبرهنة (2-2):

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود من $k[x]$، وكان $g(x)$ غير صفري، فإنه يوجد كثيرتا حدود وحيدتان $q(x)$ و $r(x)$ من $k[x]$ يحققان العلاقة:

$$f(x) = q(x) . g(x) + r(x)$$

حيث إن $r(x) = o$ (كثيرة حدود صفرية) أو أن $\deg r(x) < \deg g(x)$

يسمى $q(x)$ ناتج القسمة و $r(x)$ باقي القسمة .

البرهان:

1- إذا كان $f(x)$ كثيرة الحدود الصفري، أي:

$$f(x) = 0(x)$$

عندئذ يكون:

$$f(x) = 0(x) . g(x) + f(x)$$

المبرهنة تكون محققة من أجل هذه الحالة.

2- وإذا كانت درجة $f(x)$ أصغر من درجة $g(x)$،أي:

$$\deg f(x) < \deg g(x)$$

فإنه عندئذ يكون:

$$f(x) = 0(x) . g(x) + f(x)$$

وتكون شروط المبرهنة محققة أيضاً من أجل هذه الحالة.

3- أما إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر أو تساوي درجة $g(x)$، أي إذا كان:

$$\deg f(x) \geq \deg g(x)$$

فإننا نفترض أن:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

حيث إن:

$$a_n \neq 0 \ , \ b_m \neq 0 \ , \ n \geq m$$

لنشكل كثيرة الحدود:

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} . g(x)$$

فإذا فرضنا أن كثيرة الحدود الجديدة $f_1(x)$ هي من الشكل:

$$f_1(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

فإن$f_1(x)$ وبحسب تعريفها إما أن تكون كثيرة الحدود الصفري أو أن درجتها أصغر من درجة$f(x)$.

فإذا كان $f_1(x) = 0$ (x)،أو كان من درجة أقل من درجة $g(x)$، فإننا نكون قد حصلنا على العلاقة:

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} . g(x) + f_1(x)$$

حيث يكون فيها:

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad , \quad r(x) = f_1(x)$$

وبذلك يكون قد تم البرهان.

أما إذا كانت درجة $f_1(x)$ أكبر أو تساوي درجة $g(x)$، فإننا ،ومن جديد ،نشكل كثيرة الحدود التالية:

$$f_2(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} . g(x) - \frac{c_p}{b_m} x^{p-m} . g(x)$$

من جديد إذا كان $f_2(x) = 0$ (x) أو أنه من درجة أصغر من درجة $g(x)$،فإن البرهان يكون قد تم، وحصلنا على العلاقة:

$$f(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{c_p}{b_m} x^{p-m}\right) g(x) + f_2(x)$$

والتي يكون فيها:

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{c_p}{b_m} x^{p-m} \quad , r(x) = f_2(x)$$

وإلا فإننا نكرر هذه المناقشة عدداً محدوداً من المرات إلى أن نحصل في نهاية المطاف على باقي القسمة:

$$r(x) = f_2(x)$$

والذي سيكون إما مساوياً لكثيرة الحدود الصفرية$0(x)$ أو أنه من درجة أصغر من درجة $g(x)$.

أما لبرهان وحدانية $q(x)$ و $g(x)$ فإننا نفرض:

$$f(x) = q(x) . g(x) + r(x)$$

$$f(x) = q'(x) . g(x) + r'(x)$$

حيث أن درجتي $r(x)$و $r'(x)$ أصغر من درجة $g(x)$.

عندئذ يكون:

$$q(x) . g(x) + r(x) = q'(x) . g(x) + r'(x)$$

والتي نحصل منها على العلاقة:

$$[\, q(x) - q'(x) \,] . g(x) = r'(x) - r(x)$$

والتي تكون فيها درجة كثيرة الحدود $r'(x) - r(x)$ أصغر من درجة $g(x)$، أي أن:

$$\deg [\, r'(x) - r(x) \,] < m$$

في حين أن درجة كثيرة الحدود $[\, q(x) - q'(x) \,] . g(x)$ أكبر أو تساوي درجة $g(x)$،أي أن:

$$\deg [\, q(x) - q'(x) \,] . g(x) \geq m$$

إلا في الحالة التي يكون فيها:

$$q(x) - q'(x) = 0(x)$$

إذاً فإن:

$$q(x) - q'(x) = 0(x) \Longrightarrow q(x) = q'(x)$$

$$r'(x) - r(x) = 0(x) \Longrightarrow r(x) = r'(x)$$

مما يعني أن $q(x)$ و $r(x)$ وحيدان وبذلك يتم البرهان.

ملاحظة (2-3):

يجب أن نميز جيداً بين كثيرة الحدود الصفرية والمعادلة الحدودية. فإذا كان لدينا كثيرة الحدود:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad ; a_i \in k$$

فإن $f(x) = 0$ هي كثيرة حدود صفرية عندما يكون $a_i = 0$ (حيث $i = 1,2,\ldots, n$).
بينما المعادلة الحدودية $f(x) = 0$ فهي عندما لا تكون جميع الأمثال a_i أصفاراً.

ونذكر أيضاً بأن العدد a يسمى صفراً لكثيرة الحدود $f(x)$ إذا كان جذراً للمعادلة $f(x) = 0$، أي إذا كان $f(a) = 0$.

(2–3) كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة مربعة:

The Characteristic Polynomial of matrix

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n على حقل F. نشكل مصفوفة على الحلقة $F[x]$.

$$[xI_n - A] = \begin{bmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{bmatrix}$$

تعريف (3–1):

نسمي $[xI_n - A]$ المصفوفة المميزة للمصفوفة A ، كما نسمي كثيرة الحدود

$\Delta(x) = det[xI_n - A]$ كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A وكذلك المعادلة

$det[xI_n - A] = 0$ المعادلة المميزة للمصفوفة، وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور المعادلة المميزة (جذور كثيرة الحدود المميزة) في الحقل F.

(2–4) خواص كثيرة الحدود المميزة

Properties of the Characteristic Polynomial

نبين بشكل عام طريقة التعبير عن كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة مربعة من المرتبة n.

لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

بما أن المحددة المعطاة هي عبارة عن مجموع متناوبة من الحدود، كل حد هو عبارة عن جداء من العناصر المأخوذة من كل سطر وعمود. إن أكبر درجة تكون في الجداء $(x -$ $a_{11}) \ldots (x - a_{nn})$، وهي $(x)^n$.

يمكن تحديد الحدود من الدرجة $n-1$ بسهولة، لأنها تنتج من الجداء نفسه، وبالتالي فإن معامل الحد x^{n-1} هو

$$(-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn})$$

يسمى عادة مجموع عناصر القطر الرئيسي أثر المصفوفة A (Trace of A):

$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

وبالتالي فإن الحد من الدرجة $n-1$ لـ $p(x)$ هو $-tr(A)(x)^{n-1}$

بالإضافة لذلك يمكن إيجاد الحد الثابت لـ $p(x)$ وذلك بأن نضع $x=0$ في $det(xI_n - A)$ فنجد أنه يساوي $(-1)^n det(A)$.

بهذا الشكل نكون قد حصلنا على:

$$p(x) = x^n - tr(A)(x)^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)$$

يعبر عن المعاملات الأخرى في كثيرة الحدود المميزة كصغائر للمحددة A.

مثال (4−1)

أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda$$

مبرهنة (4−1):

إن كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة مربعة A يساوي كثيرة الحدود المميزة لمنقولة هذه المصفوفة.

الإثبات:

لنرمز لكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A بالرمز $\Delta(\lambda)$ ولكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A^T (منقول المصفوفة A) بالرمز $\Delta`(\lambda)$ عندها يكون:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = \det[\lambda I - A] &= \det[\lambda I - A]^T \\ &= \det[\lambda I^T - A^T] \\ &= \det[\lambda I - A^T] = \Delta`(\lambda) \end{aligned}$$

وذلك لأن $I^T = I$ ومنقول مجموع مصفوفتين يساوي مجموع المنقولين و $\det A^T = \det A$.

مثال (4−2):

في المثال السابق لنوجد كثيرة الحدود المميزة لمنقول المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

إن منقول هذه المصفوفة هو:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه كثيرة الحدود المميزة لـ A^T هو:

$$\Delta`(\lambda) = \det[\lambda I - A^T] = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda$$

ومنه يكون:

$$\Delta`(\lambda) = \Delta(\lambda)$$

أي أن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A تساوي كثيرة الحدود المميزة لمنقولها A^T .

وبسهولة نستطيع أن نستنتج النتيجة التالية:

نتيجة (4−1)

إذا كانت $A = [a_{ij}]_n$ مصفوفة مربعة من المرتبة n ، فإن A هي مصفوفة قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان الحد الثابت a_0 في كثيرة الحدود المميزة لا يساوي الصفر.

مثال (4−3)

لدينا في المثال السابق (3−2) أن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

هي : $\Delta(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda$

بسهولة يمكن التأكد من أن:

$$|A|=0 \quad , \ tr(A)=4$$

وهو صحيح بحسب نص المبرهنة السابقة.

مثال (4−4)

مستفيداً من المبرهنة السابقة أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

الحل:

نفرض أن:

$$\Delta(x)=x^2+a_1x+a_0$$

إن:

$$tr(A)=7 \Rightarrow a_1=-tr(A)=-7$$

$$|A|=14 \Rightarrow a_0=(-1)^2.|A|=14$$

وبالتالي يكون كثير الحدود المميز للمصفوفة A هو:

$$\Delta(x)=x^2-7x+14$$

مبرهنة(4−2) :

المصفوفات المتشابهة تملك كثيرات حدود مميزة متساوية.

البرهان:

لنفرض أن A مصفوفة مربعة من المرتبة n فوق الحقل K و B مصفوفة مربعة أيضاً من المرتبة n متشابهة مع المصفوفة A وهذا يعني وجود مصفوفة نظامية p من المرتبة n فوق الحقل K من اجلها يكون:

$$B=p^{-1}.A.p \quad ..... (1)$$

وبفرض أن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A|$$

وبفرض أن كثيرة الحدود المميزة لـ B هي: $\Delta`(\lambda)$ يكون:

$$\begin{aligned}\Delta`(\lambda) &= |\lambda I - B| \\ &= |\lambda p^{-1}P - p^{-1}.Ap| \\ &= |p^{-1}(\lambda I - A)p| \\ &= |p^{-1}|.|\lambda I - A|.|p| \\ &= |p|^{-1}.|p|.|\lambda I - A| = |\lambda I - A| = \Delta(\lambda)\end{aligned}$$

أي أن: $\Delta`(\lambda) = \Delta(\lambda)$

وهذا يعني أن كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمصفوفة A تساوي كثيرة الحدود المميزة لـ B المشابهة لـ A .

مثال (4−5):

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ولنأخذ المصفوفة النظامية: $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

إن مقلوب p هو المصفوفة: $p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

وبالتالي فإن:

$$B = p^{-1}.A.p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

إن المصفوفتين A, B متشابهتان ولنرمز لكثيرة الحدود المميزة لـ A بالرمز $\Delta(\lambda)$ وكثيرة الحدود المميزة لـ B بالرمز $\Delta`(\lambda)$ فنجد أن:

$$\Delta(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & -2\\ -1 & \lambda & 4\\ 0 & -I & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda+3$$

وكذلك فإن:

$$\Delta`(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & 0\\ 7 & \lambda & -1\\ -9 & -3 & \lambda\end{vmatrix}$$

أي أن كثيرة الحدود المميزة (λ) للمصفوفة A يساوي كثيرة الحدود المميزة $\Delta`(\lambda)$ للمصفوفة B .

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n على الحقل F، ولتكن:

$$p(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0\ ;\ \alpha_i\in F \qquad (2-1)$$

كثيرة حدود من الحلقة F[x]. عندئذ تشكل المصفوفة

$$p(A)=\alpha_n A^n+\cdots+\alpha_1 A+\alpha_0 I\ , \qquad (2-2)$$

قيمة كثيرة الحدود من أجل $x=A$ ، حيث I هي المصفوفة الواحدية ، مرتبتها من مرتبة A .

تعريف (4−1):

لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود في (2−1) ، عندئذ إذا كان $p(A)=0$، فإن A تشكل جذراً لـ $p(x)$.

مبرهنة (4−3):

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل F بعده n ، ولتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n. عندئذ يكون $p(A)=0$ من أجل كثيرة حدود غير صفرية $p(x)\in F[x]$.

البرهان:

بما أن $M_n(F)$ مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n تشكل فضاءً متجهياً بعده n^2، وبالتالي فإن المجموعة الجزئية $\{I, A, \dots, A^{n^2}\}$، والتي تحوي n^2+1 عنصراً تكون مرتبطةخطياً على الحقل F، وبالتالي توجد عناصر ليست جميعها أصفاراً $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}$، بحيث يكون $\sum_{i=0}^{n^2} \alpha_j A^j = 0$ عندئذ $p(A) = 0$ مع العلم أن:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_j X^j \in F[x]$$

مبرهنة (4−4) (مبرهنة كيلي – هاملتون)

كل مصفوفة مربعة A تشكل جذراً لكثيرة حدودها المميزة.

البرهان:

لتكن المصفوفة المربعة A من المرتبة n، ولتكن كثيرة الحدود المميزة

$$\Delta(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

للمصفوفة A. نأخذ المصفوفة B القرينة للمصفوفة $(xI - A)$، وبالتالي فإن B كثيرة حدود درجتها لا تزيد عن $n-1$ ،وذلك لأن عناصر $B(x)$ هي معاملات المصفوفة $(xI - A)$ إذاً $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0$، حيث B_i مصفوفات مربعة من المرتبة n ومستقلة عن x. حسب خواص المصفوفة القرينة نجد أن:

$$(xI - A)B(x) = |xI - A|I$$

هذا يعني أن:

$$(xI - A)(B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

بمساواة معاملات القوى للمتغير x يكون لدينا:

$$B_{n-2} = I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = \alpha_{n-1}I$$

$$\dots \;\; \dots\dots$$

$$B_0 - AB_1 = \alpha_1 I$$

$$-AB_0 = \alpha_0 I$$

بضرب المعادلات السابقة بالمصفوفات $I, \dots, A^{n-1}, A^n$ على الترتيب نحصل على:

$$A^n B_{n-2} = A^n$$
$$A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \alpha_{n-1} A^{n-1}$$
$$\dots \quad \dots\dots$$
$$AB_0 - A^2 B_1 = \alpha_1 A$$
$$-AB_0 = \alpha_0 I$$

بجمع المعادلات السابقة نجد أن:

$$A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

أي أن $\Delta(A) = 0$. وهو المطلوب.

لتكن $p(x) \in F[x]$ ، ولتكن A جذراً لها. إذا اخترنا كثيرة الحدود بأصغر درجة وقسمنا كثيرة الحدود $p(x)$ على معامل الحد الأعلى درجة فنحصل على كثيرة حدود واحدية (معامل الحد القائد 1).

(2–5) حساب مقلوب مصفوفة باستخدام مبرهنة كيلي– هاملتون:

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n. ولتكن:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A. عندئذ، حسب نظرية كايلي هاملتون، يكون$\Delta(A) = 0$، أي أن A جذر لكثيرة الحدود المميزة، وبالتالي يكون:

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$$

إذا كانت A مصفوفة نظامية، أي أن $\det A \neq 0$ ، فإن $\alpha_n \neq 0$، ومنه نجد أن:

$$A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} I + \alpha_n A^{-1} = 0$$
$$-\alpha_n A^{-1} = A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} I$$

وبالتالي فإن:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n} (A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} I)$$

وهذه هي الصيغة التي من خلالها نقوم بحساب مقلوب مصفوفة نظامية.

مثال (5–1)

لتكن لدينا المصفوفة المربعة النظامية التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أ- حقق نظرية كيلي هاملتون من أجل المصفوفة A .

ب- احسب A^3 , A^4 .

ج- أوجد مقلوب المصفوفة A باستخدام نظرية كيلي هاملتون ، ثم أوجد A^{-2} .

الحل:

1- لنحسب أولاً كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمصفوفة A .

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-1 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3$$

وباستخدام نظرية كيلي – هاملتون نجد أن:

$$\Delta(A)=A^3-3A^2-A+3I=0 \qquad (4-1)$$

2- لدينا من العلاقة الأخيرة:

$$A^3=3A^2+A-3I$$

$$=3(A\cdot A)+A-3I$$

$$=3\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 13 & -14\\ 2 & -14 & 13\end{bmatrix}$$

ونجد أيضاً:

$$A^4 = 3A^3 + A^2 - 3A$$

$$= 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -14 \\ 2 & -14 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & -40 \\ 0 & -40 & 41 \end{bmatrix}$$

ج- من العلاقة (4-1) نجد:

$$3I = -A^3 + 3A^2 + A$$

$$\Rightarrow 3A^{-1} = -A^2 + 3A + I = 1/3(-A^2 + 3A + I) \qquad (4-2)$$

ولدينا:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وأن:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

وبالعودة إلى الصيغة (4-2) نجد:

$$A^{-1} = -1/3\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1/3 & -2/3 \\ 2 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

وأخيراً فإن العلاقة (4-2):

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(I + 3A - A^2)$$

$$\Rightarrow A^{-2}=\frac{1}{3}\left(A^{-1}+3I-A)\right)$$

أي أن:

$$A^{-2}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

(2–6) كثيرة الحدود المميزة لمؤثر خطي:

في كتاب الجبر الخطي (1) والفصل السابق برهنا على أن جميع مصفوفات المؤثر الخطي $f:V\rightarrow V$ على الفضاء المتجهي منتهي البعد V بالنسبة لجميع أساسات V هي مصفوفات متشابهة ، وبالتالي حسب المبرهنة (4–4) فلها جميعها كثيرة حدود مميزة واحدة فقط ، وعليه فإننا نستطيع أن نقدم التعريف التالي:

تعريف (6–1):

ليكن V فضاء متجهياً منتهي البعد فوق الحقل K وليكن $f:V\rightarrow V$ مؤثراً خطياً على V . ولتكن A مصفوفة هذا المؤثر الخطي بالنسبة لأساس ما لـ V . إن كثيرة الحدود المميزة لـ f هي نفسها كثيرة الحدود المميزة لمصفوفته A أي هي: $|\lambda I-A|$.

مثال (6–1):

ليكن $f:\Re^3\rightarrow\Re^3$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$$

والمطلوب:

1- أوجد مصفوفة المؤثر الخطي بالنسبة لأساس نظامي E في $\Re^3$.

2- أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للأساس :

$B=\{(1,1,1)\,,(1,1,0),(1,0,0)\}$ في الفضاء المتجهي $\Re^3$.

3- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمؤثر الخطي f وذلك بالنسبة لمصفوفته بالنسبة للأساس النظامي E. وأيضاً من خلال مصفوفته بالنسبة للأساس B . وتأكد من أن كثيرة الحدود المميزة لـ f هي نفسها بالنسبة للمصفوفتين.

الحل:

1) لدينا:

$$f(1,0,0)=(2,0,0)=2.e_1+0.e_2+0.e_3$$

$$f(0,1,0)=(1,1,2)=1.e_1+1.e_2+2.e_3$$

$$f(0,0,1)=(0,-1,4)=0.e_1-1.e_2+4e_3$$

ومنه فإن مصفوفة f هي:

$$\Rightarrow A_1=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

2)

$$f(1,1,1)=(3,0,6)=6.(1,1,1)-6(1,1,0)+3(1,0,0)$$

$$f(1,1,0)=(3,1,2)=2.(1,1,1)-1.\,(1,1,0)+2(1,0,0)$$

$$f(1,0,0)=(2,0,0)=0.(1,1,1)+6(1,1,0)+2.(1,0,0)$$

ومنه فإن مصفوفة f بالنسبة للأساس B هي:

$$\Rightarrow A_2=\begin{bmatrix}6 & 2 & 0\\ -6 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

3) أولاً نحسب كثيرة الحدود المميزة لـ f من خلال المصفوفة A_1 فنجد:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1\\ 0 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left[(\lambda-1)(\lambda-4)+2\right]=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12$$

ثانياً: نحسب كثيرة الحدود المميزة للمؤثر الخطي f من خلال المصفوفة A_2 وهي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A_2|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -2 & 0\\ 6 & \lambda+1 & 0\\ -3 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left[(\lambda-6)(\lambda+1)+12\right]$$

$$=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12$$

أي أن كثيرة الحدود المميز للمؤثر الخطي f هي:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12$$

وذلك بالنسبة لأية مصفوفة A, A_2 أو أية مصفوفة أخرى للمؤثر الخطي f .

(7–2) كثيرة الحدود الأصغرية:

The minimal polynomial

إذا كان f مؤثراً خطياً على الفضاء V المنتهي البعد والذي بعده n أي أن: $f\in Hom(V,V)$ وبفرض أن $p(x)\in K[x]$ حيث $K[x]$ حلقة كثيرات الحدود على الحقل K. عندها فإن $p(f)$ مؤثر خطي على V أيضاً أي $p(f)\in Hom(V,V)$ وبما أن بعد الفضاء المتجهي $Hom(V,V)$ يساوي n^2 فإن كل مجموعة متجهات من هذا الفضاء وعددها n^2+1 تكون مرتبطة خطياً وبالتالي فالمتجهات: $I, f, f^2, f^3, \dots\dots, f^{n2}$

من الفضاء $Hom(V,V)$ والتي عددها n^2+1 مرتبطة خطياً أي يمكن تعيين المعاملات $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots.,\alpha_{n^2}\in K$ والتي لا تساوي جميعها الصفر بحيث يكون:

$$\alpha_0 I+\alpha_1 f+\alpha_2 f^2+\dots.+\alpha_{n^2} f^{n^2}=0$$

معنى ذلك أنه توجد كثيرة حدود:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_{n^2} x^{n^2} \in K[x]$$

بحيث يكون: $p(f)=0$ وأن المجموعة :

$$M = \{p(x) \in k[x] : p(f)=0\} \quad (7-1)$$

مثالي للحلقة $K[x]$. وبما أن كل مثالي رئيسي في هذا الجبر غير صفري أي أن $M \neq 0$. إذن توجد كثيرة حدود واحدية $m(x)$ مولّدة لهذا المثالي بحيث يكون $p(f)=0$ ، تسمى كثيرة الحدود $m(x)$ بكثيرة الحدود الأصغرية للمؤثر f على الفضاء المتجهي V أي أن :

$$. M = \{p(x) = m(x).q(x) : p(f)=0\}$$

تعريف (7−1):

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n، نسمي كثيرة الحدود غير الصفرية $m(x)$ والتي تنعدم بالمصفوفة A (أي أن A صفر لها)، كثيرة حدود أصغرية للمصفوفة A إذا تحقق الشرطان:

1− درجة كثيرة الحدود $m(x)$ أصغر درجة كثيرة حدود وتكون A صفراً لها.

2− معامل أكبر قوة لـ x (الحد الأكبر) فيها هو 1 .

نتيجة (7−1):

1− للمصفوفة $A \in M_{(n,n)}(K)$ كثيرة حدود أصغرية $m(x)$ بحيث تكون $.m(A)=0$

2− كل كثيرة حدود من الشكل $\mu \cdot m(x)$ حيث $\mu \in K$ هي كثيرة حدود درجتهاأصغر ما يمكن وتحقق $p(f)=0$ (حسب المساواة (1−6)).

مبرهنة (7−1):

إن كثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفة المربعة $A \in M_{n,n}(K)$ تتعين بشكل وحيد.

البرهان:

لتكن $m_1(x), m_2(x)$ كثيرتي حدود أصغريتين للمصفوفة المربعة A وبفرض أن:

$$m(x) = m_1(x) - m_2(x) \quad (7-2)$$

وبحسب الشرط (2) من التعريف (7−1) لكثيرة الحدود الأصغرية لمصفوفة مربعة ينتج أن:

$$\deg m(x) < \deg m_1(x) = \deg m_2(x)$$

ومن العلاقة (7−2) نستنتج أن:

$$m(A) = 0$$

أي أن A صفر لكثيرة الحدود $m(x)$ لأن:

$$\deg m(x) < \deg m_1(x) = \deg m_2(x)$$

واعتماداً على تعريف كثيرة الحدود الأصغرية لمصفوفة مربعة ينتج أن:

$$m(x) = 0(x)$$

وبالتالي ينتج من العلاقة (7−2) أن: $m_1(x) = m_2(x)$

وهو المطلوب.

مبرهنة (7−2):

للمصفوفات المتشابهة كثيرة حدود أصغرية واحدة.

البرهان:

لتكن المصفوفتان المتشابهتان $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ، إذن توجد مصفوفة نظامية p بحيث يكون:

$$A = p^{-1}.B.P \qquad . .. (7-3)$$

ووجدنا أن :

$$A^n = p^{-1}.B^n.P \ , \ \forall n \in Z \qquad .... (7-4)$$

فإذا كانت:

$$m(x) = x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + ... + \alpha_k \quad (k \le n)$$

الحدودية الأصغرية للمصفوفة A فإن $m(A) = 0$ أي:

$$m(A) = A^k + \alpha_1 A^{k-1} + ... + \alpha_k I_n \qquad ... (7-5)$$

نعوض في (7–5) قوى A بما يساويها من العلاقة (7–4) نجد:

$$m(A)=P^{-1}B^{k}P+\alpha_1 P^{-1}B^{k-1}+\alpha_2 P^{-1}B^{k-2}P+....+\alpha_k P^{-1}P$$

$$=P^{-1}(B^{k}+\alpha_1 B^{k-1}+\alpha_2 B^{k-2}+....+\alpha_k I)P$$

$$=P^{-1}m(B)P$$

إذن أصبح لدينا : $m(A)=p^{-1}.m(B)\,p$

بما أن $m(A)=0$ إذن $m(B)=0$ وبالتالي فإن كثيرة الحدود الأصغرية لـ B ولتكن $g(x)$ تقسم $m(x)$ وبالتالي :

$\deg g(x)\leq \deg m(x)$. وبطريقة مشابهة نستنتج أن:

$\deg m(x)\leq \deg g(x)$ إذن $\deg m(x)=\deg g(x)$

وبالتالي كثيرتا الحدود الأصغريتان لـ A, B هما من درجة واحدة وبما أن $g(x)|m(x)$ وهما واحديتان إذن $g(x)=m(x)$ وهو المطلوب.

نتيجة (7–2):

إن كثيرة الحدود الأصغرية لمؤثر خطي على فضاء متجهي V بُعده منته هي كثيرة الحدود الأصغرية لأية مصفوفة لهذا المؤثر الخطي.

(2–8) العلاقة بين كثيرتي الحدود الأصغرية والمميزة لمؤثر خطي.

هناك علاقة وثيقة ما بين كثيرة الحدود الأصغرية لمؤثر خطي وكثيرة الحدود المميزة له. حيث إن كثيرة الحدود الأصغرية تقسم كثيرة الحدود المميزة للمؤثر الخطي كما في المبرهنة التالية:

مبرهنة (8–1) (كيلي هاملتون):

إذا كان V فضاء متجهياً منتهي البعد فوق الحقل K . إن كثيرة الحدود الأصغرية للمؤثر الخطي $f\in Hom(V,V)$ تقسم كثيرة الحدود المميزة له.

البرهان:

لنفرض أن $\dim V=n$ وأن A مصفوفة مربعة للمؤثر الخطي $f\in Hom(V,V)$ بالنسبة لأساس ما في هذا الفضاء.

إن كثيرة الحدود المميزة لـ f هي:

$$\Delta(x) = \det(xI - A)$$

حيث تنتمي عناصر المصفوفة $xI - A$ إلى جبر كثيرات الحدود التبديلي والواحدي $K[x]$. وكذلك الأمر بالنسبة للمصفوفة الملحقة لها $\Gamma(xI_n - A)$ ونعلم ان:

$$(xI_n - A)\Gamma(xI_n - A) = \Delta(x)\cdot I_n \qquad (7-1)$$

إن الطرف الأيسر من (7−1) كثيرة حدود تنتمي إلى $(M_{nn}(K)[x]$ أي كثيرة حدود بمتغير واحد x ومعاملاتها من الجبر $M_n(K)$ أي جبر المصفوفات المربعة الواحدي وغير التبديلي من المرتبة n فوق الحقل K .

وعندما نضع $x=A$ يصبح الطرف الأيسر من العلاقة (7−1) صفراً وتنتج العلاقة التالية:

$$\Delta(A)=0$$

أي أن كثيرة الحدود المميزة $\Delta(x)$ للمؤثر الخطي f منتمية إلى المثالي المولّد لـ كثيرة الحدود الأصغرية $m(x)$ له ومنه $m(x)$ تقسم $\Delta(x)$ وهو المطلوب.

نتيجة (8−1):

$\deg m(x)\leq\deg\Delta(x)$ أي أن درجة كثيرة الحدود الأصغرية لأي مؤثر خطي أصغر وتساوي درجة كثيرة الحدود و المميزة.

مثال (8−1):

لتكن
$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

مصفوفة من المرتبة 3 على الحقل $\Re$ والمطلوب: أحسب المصفوفة الملحقة للمصفوفة $(\lambda I_3 - A)$ ثم اكتبها على شكل كثيرة حدود تنتمي إلى $M_3(\Re)[\lambda]$ أي على الشكل:

$$\Gamma(\lambda I_3 - A)=C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0$$

الحل:

لنحسب $\Gamma(\lambda I_3 - A)$ وهي:

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & -2 \\ -4 & \lambda+4 & -6 \\ -2 & 3 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \lambda+4 & -6 \\ 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & \lambda+4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ \lambda+4 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ -4 & \lambda+4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & -4\lambda+32 & 2\lambda-2 \\ -2\lambda+4 & \lambda^2-8\lambda+11 & -3\lambda+5 \\ 2\lambda-4 & 6\lambda-10 & \lambda^2+\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 32 & -2 \\ 4 & 11 & 5 \\ -4 & -10 & -4 \end{bmatrix}$$

.

لقد أثبتنا أن كثيرة الحدود الأصغرية موجودة لأي مؤثر خطي $f \in Hom(V,V)$ وأن كثيرة الحدود الأصغرية تقسم كثيرة الحدود المميزة.

والسؤال الذي يطرح نفسه عن أصفار كثيرتي الحدود الأصغرية والمميزة وهل هنا علاقة بينهما، الإجابة في المبرهنة الهامة التالية:

مبرهنة (8−2):

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n. عندئذ كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A تقسم $\left(m(x)\right)^n$، حيث $m(x)$ كثيرو الحدود الصغرى لـ A.

البرهان:

لتكن $m(x) = x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$

نعرف المصفوفات الآتية:

$$B_0 = I$$

$$B_1 = A + \alpha_1 I$$
$$B_2 = A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I$$
$$\dots \dots \dots$$
$$B_{k-1} = A^{k-1} + \alpha_1 A^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} I$$

نضرب طرفي المعادلات السابقة بـ A ونطرح كل معادلة من التي تليها فنحصل على المعادلات:

$$B_0 = I$$
$$B_1 - AB_0 = \alpha_1 I$$
$$B_2 - AB_1 = \alpha_2 I$$
$$\dots \dots \dots$$
$$B_{k-1} - AB_{k-2} = \alpha_{k-1} I$$
$$-AB_{k-1} = \alpha_k I - \left(A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} A + \alpha_k I\right)$$
$$= \alpha_k I - m(A) = \alpha_k I$$

نأخذ
$$B(x) = B_0 x^{k-1} + B_1 x^{k-2} + \cdots + B_{k-2} x + B_{k-1}$$

وبالتالي

$$(xI - A)B(x) = \left(B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + \cdots + B_{k-1} x\right) - \left(AB_0 x^k + AB_1 x^{k-1} + \cdots + AB_{k-1} x\right)$$
$$= B_0 x^k + (B_1 + AB_0) x^{k-1} + (B_2 - AB_1) x^{k-2} + \cdots + (B_{k-1} - AB_{k-2}) x - AB_{k-1}$$
$$= x^k + \alpha_1 x^{k-1} I + \cdots + \alpha_{k-1} x I + \alpha_k I = m(x) I$$

نأخذ محددة الطرفين للعلاقة الأخيرة نجد أن:

$$|xI - A||B(x)| = |m(x)I| = \left(m(x)\right)^n$$

بما أن $B(x)$ كثيرة حدود،إذن $|xI - A|$ تقسم $\left(m(x)\right)^n$. وهو المطلوب.

مبرهنة (8-3):

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n. عندئذ يكون لكثيرتي الحدود المميزة والصغرى لـ A نفس العوامل غير الخزولة.

البرهان:

لتكن $f(x)$ كثيرة حدود غير خزولة. إذا كانت $f(x)|m(x)$، فإن $f(x)|\Delta(x)$، وذلك لأن $m(x)|\Delta(x)$.

من جهة ثانية إذا كانت $f(x)|\Delta(x)$، فإن $f(x)|\left(m(x)\right)^n$ وذلك حسب المبرهنة (8−2). بما أن $f(x)$ غير خزولة، فإن $f(x)|m(x)$ أيضاً، وبالتالي فإن $m(x)$ و $\Delta(x)$ يملكان نفس العوامل غير الخزولة.

نتيجة (8−1):

إن المبرهنة (8−3) لا تعني بأن $\Delta(\lambda)=m(\lambda)$ ولكنها تعني أن أي عامل غيرخزول في إحداهما لابد أن يقسم الأخرى وعلى الخصوص وبما أن اي عامل خطي يكون غير خزول، فإنه يكون لـ $m(\lambda)$ و $\Delta(\lambda)$ نفس العوامل الخطية. وبالتالي لهما نفس الجذور.

مثال (8−2):

لتكن $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من المرتبة 3 والمطلوب:

1− أوجد كثيرة الحدود المميزة لـ A .

2− أوجد كثيرة الحدود الأصغرية لـ A .

الحل:

لدينا:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & -3 \\ 2 & \lambda+3 & 2 \\ -2 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-2)(x-1)^2$$

كثيرة الحدود الأصغرية $m(\lambda)$ يجب أن تقسم $\Delta(\lambda)$.

أي أن $\lambda-2$ ، $\lambda-1$ يجب أن يكون عاملاً في $m(\lambda)$ إذن يجب أن تكون $m(\lambda)$ إحدى كثيرتي الحدود إما:

$m_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ أو $m_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

نختبر $m_1(\lambda)$ فنجد:

$$m_1(A)=(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}2&6&3\\-2&-5&-2\\2&4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&6&3\\-2&-4&-2\\2&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

وبذلك تكون: $m_1(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-2)\ (\lambda-1)$

$= \lambda^2-3\lambda+2$

هي الحدودية الأصغرية.

مثال (8−3) :

أوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\-2&-4&-3\\2&6&5\end{pmatrix}$$

الحل:

نوجد أولاً كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ لـ A نجد:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-4&-2\\2&\lambda+4&3\\-2&-6&\lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-1)$$

إن الحدودية الأصغرية $m(\lambda)$ و A تكون إحدى كثيرتي الحدود:

$m_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ أو $m_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

نختبر $m_1(\lambda)$ نجد:

$$m_1(A)=(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}1&4&2\\-2&-6&-3\\2&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&2\\-2&-5&-3\\2&6&4\end{pmatrix}$$

وبذلك يكون $m(\lambda)\neq m_1(\lambda)$ ينتج عن ذلك أن:

$$m(\lambda)=m_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

ملاحظة (8−1):

في المثال السابق لسنا بحاجة للتأكد من أن $m_2(A)=0$ نعلم من مبرهنة كايلي هاملتون أن: $\Delta(A)=m_2(A)=0$

(9–2) طريقة ثانية لحساب كثيرة الحدود الأصغرية.

إن المبرهنة التالية تقدم لنا طريقة ثانية لحساب كثيرة الحدود الأصغرية $m(\lambda)$. بفرض أن A مصفوفة مربعة من المرتبة n .

مبرهنة (9–1):

ليكن $g(\lambda)$ القاسم المشترك الأكبر لعناصر المصفوفة الملحقة $adj(\lambda I-A)$ و أن $h(\lambda)=\dfrac{\Delta(\lambda)}{g(\lambda)}$ عندها فإن $h(\lambda)=m(\lambda)$ كثيرة الحدود الأصغرية لـ A .

البرهان:

نحن نعلم أن:

$$(\lambda I_n-A)-ad_j(\lambda I_n-A)=ad_j(\lambda I_n-A).(\lambda I_n-A)=I_n.\Delta(\lambda) \quad (9-1)$$

ومن المساواة السابقة (9–1) نلاحظ أن $g(\lambda)$ يجب أن تقسم $\Delta(\lambda)$ وليكن:

$$B(\lambda)=\frac{adj(\lambda I_n-A)}{g(\lambda)} \quad ....\ (9-2)$$

ومن (9–1) نجد أن:

$$(\lambda I_n-A).B(\lambda)=B(\lambda).(\lambda I_n-A)=I_n.h(\lambda) \ \dots \quad (9-3)$$

يمكن كتابة المصفوفة $B(\lambda)$ على شكل كثيرة حدود من الدرجة $n-1-s$ ومعاملاتها من $M_n(K)$ وذلك بفرض أن s هي درجة كثيرة الحدود $g(x)$:

$$B(\lambda)=B_{n-i}\lambda^{n-1-s}+B_{n-2}\lambda^{n-2-s}+.....+B_1\lambda+B_0 ..... \ (9-4)$$

ولتكن:

$$h(\lambda)=\lambda^{n-s}+a_{n-1}\lambda^{n-1-s}+.....+a_1\lambda+a_0 \ \dots \ (9-5)$$

نعوض في (9–3) $B(\lambda)\,,\,h(\lambda)$ بما يساويهما من (9–4) و (9–5) نجد

$$\left(B_{n-1}\lambda^{n-1-s}+B_{n-2}\lambda^{n-1-s}+.....+B_1\lambda+B_0\right)(\lambda I-A)=$$
$$=I(\lambda^{n-s}+a_{n-1}\lambda^{n-s-1}+....+a_1\lambda+a_0)$$

نساوي قوى λ في الطرفين نجد:

$$B_{n-1}=I$$
$$-B_{n-1}A+B_{n-2}=a_{n-1}I$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$-B_1A+B_0=a_1I$$
$$-B_0A \quad =a_0I$$

نضرب من اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل العلاقات السابقة بـ:

$$A^{n-s}\ ,\ A^{n-s-1},\ldots\ldots,A,I$$

ونجمع، نجد بعد الاختصار أن:

$$A^{n-s}+a_{n-1}A^{n-s-1}+\ldots.+a_0I=0 \qquad \ldots.\ (9-6)$$

وهذا يبرهن أن:

$$h(A)=0$$
$$\Rightarrow h(\lambda)=m(\lambda).k(\lambda) \qquad \ldots\ (9-7)$$

ولنبرهن أن $k(\lambda)$ حدودية من الدرجة صفر.

نعلم أن: $m(\lambda)-m(\lambda`)$ يقبل القسمة على $\lambda-\lambda`$:

$$m(\lambda)-m(\lambda`)=(\lambda-\lambda`)-g(\lambda,\lambda`)$$

حيث تكون $g(\lambda,\lambda`)$ كثيرة حدود في $\lambda\ ,\lambda`$. إن المصفوفتين A و λI تبادليتان.

نبدل بالعلاقة السابقة λ بـ λI و $\lambda`$ بـ A نجد أن:

$$m(\lambda I)-m(A)=(\lambda I-A)\ g\ (\lambda I,A)$$
$$\Rightarrow m(\lambda).I=(\lambda I-A)\,g(\lambda I,A) \qquad \ldots\ (9-8)$$

وبما أن $B(\lambda)$ و $(\lambda I-A)$ تبادليتان، نضرب طرفي المساواة (9–8) من اليسار بـ $B(\lambda)$:

$$B(\lambda).m(\lambda)=h(\lambda).g(\lambda I,A)$$

بتبديل $h(\lambda)$ بما يساويها من (9–7) والاختصار على $m(\lambda)$ نجد أن:

$$B(\lambda)=k(\lambda)\cdot g(\lambda I,A) \qquad \ldots\ (9-9)$$

وبما أن $g(\lambda I,A)$ مصفوفة عناصرها كثيرات حدود في λ ، نستنتج من (9–9) إن كل عنصر من المصفوفة $B(\lambda)$ يقبل القسمة على $k(\lambda)$ ولكن عناصر المصفوفة

$B(\lambda)$ أولية نسبياً والقاسم المشترك الأكبر لها يساوي 1. ينتج بالتالي أن $k(\lambda)$ ثابت .
وبالتالي $h(\lambda)$ هي كثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفة A .

مثال (9−1) :

احسب كثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$$

الحل:

نوجد أولاً المصفوفة الملحقة لـ $(\lambda I-A)$

$$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

$$adj\,(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda-2 & 3\lambda+6 & 6\lambda+12\\ -3\lambda-6 & \lambda^2-5\lambda-14 & -6\lambda-12\\ 3\lambda+6 & 3\lambda+6 & \lambda^2+4\lambda+4\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$=\begin{bmatrix}(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda+2) & 6(\lambda+2)\\ -3(\lambda+2) & (\lambda+2)(\lambda-7) & -6(\lambda+2)\\ 3(\lambda+2) & 3(\lambda+2) & (\lambda+2)^2\end{bmatrix}$$

وهنا نلاحظ أن القاسم المشترك الأكبر $g(\lambda)$ لعناصر المصفوفة $adj(\lambda I-A)$ هو $(\lambda+2)$ وكذلك فإن:

$$\Delta(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+s & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

وحسب المبرهنة السابقة فإن:

$$\Rightarrow m(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{g(\lambda)}=\frac{(\lambda+2)^2.(\lambda-4)}{(\lambda+2)}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-4)$$

مبرهنة (9−2):

لتكن $M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ مصفوفة خلايا قطرية و أن A,B مصفوفتان مربعتان. عندئذ فإن كثيرة الحدود الأصغرية $m(\lambda)$ لـ M تساوي المضاعف المشترك الأصغر لكثيرتي الحدود الأصغريتين $m_1(\lambda),m_2(\lambda)$ لـ A,B .

البرهان:

بماأن $m(\lambda)$ كثيرة الحدود الأصغرية لـ M فإن: $m(M)=\begin{pmatrix} m(A) & 0 \\ 0 & m(B) \end{pmatrix}=0$

وبالتالي $m(A)=0$ و $m(B)=0$ وبما أن $m_1(\lambda)$ كثيرة الحدود الصغرية لـ A فإن $m_1(\lambda)$ تقسم $m(\lambda)$ وبالمثل $m_2(\lambda)$ تقسم $m(\lambda)$ وبذلك تكون كثيرة الحدود $m(\lambda)$ مضاعفاً لـ $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$.

وليكن الآن $f(\lambda)$ مضاعفاً آخر لـ $m_1(\lambda),m_2(\lambda)$ إذن:

$f(M)=\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$ ولكن $m(\lambda)$ كثيرة الحدود الأصغرية لـ M وبالتالي فإن $m(\lambda)$ يقسم $f(\lambda)$. إذن تكون $m(\lambda)$ هي المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(\lambda),m_2(\lambda)$.

اعتماداً على المبرهنة السابقة نستطيع التعميم وتنتج مباشرة من هذه المبرهنة وذلك بواسطة الاستقراء الرياضي المبرهنة التالية:

مبرهنة (9−3):

إذا كانت A هي مصفوفة الخلايا القطرية:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

فإن كثيرة الحدود الأصغرية $m(\lambda)$ لـ A تكون المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود الأصغرية.

. $A_1, A_2, ..., A_n$

مثال(9−2):

أوجد كثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفة، بفرض أن:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1− أوجد كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ لـ A .

2− أوجد كثيرة الحدود الأصغرية لـ A .

الحل:

نلاحظ أولاً أن A هي مصفوفة خلايا قطرية ، بمصفوفات جزئية قطرية أي:

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \ A_2=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} , A_3=(7)$$

إذن تكون $\Delta(\lambda)$ هي جداء كثيرات الحدود المميزة $\Delta_1(\lambda), \Delta_2(\lambda). \Delta_3(\lambda)$ على الترتيب وفق:

$$\Delta_1(\lambda)=\det(\lambda I-A_1)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -5 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$$

$$\Delta_2(\lambda)=\det(\lambda I-A_2)=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -3 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-7)$$

$$\Delta_3(\lambda)=\det(\lambda I-A_3)=|\lambda-7|=\lambda-7$$

وبذلك يكون:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-2)^3.(\lambda-7)^2$$

(أي أن $\deg \Delta(\lambda)=5$ كما هو متوقع).

2− نلاحظ هنا أن كثيرات الحدود الأصغرية $m_1(\lambda) , m_2(\lambda), m_3(\lambda)$ للمصفوفات الجزئية القطرية A_1, A_2, A_3 على الترتيب مساوية لكثيرات الحدود المميزة أي أن:

وحسب $m_1(\lambda)=(\lambda-2)^2\,, m_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-7), m_3(\lambda)=\lambda-7$

المبرهنة السابقة فإن: $m(\lambda)$ تساوي المضاعف المشترك الأصغر لهما أي أن:

$$m(\lambda)=(\lambda-2)^2.(\lambda-7)$$

مثال (9-3):

أوجد كثيرة الحدود $\Delta(\lambda)$ وكثيرة الحدود الأصغرية $m(\lambda)$ للمصفوفة A حيث:

$$A=\begin{bmatrix}5&1&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&5&1&0\\0&0&0&5&1\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}$$

الحل:

إن المصفوفة A هي مصفوفة خلايا مثلثية قطرية ولها المصفوفتان الجزئيتان القطريتان :

$$A_1=\begin{bmatrix}5&1\\0&5\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{bmatrix}$$

وحسب المبرهنة السابقة نجد أن كثيرة الحدود المميزة الأصغرية لـ A_1 هي

$$m_1(\lambda)=\Delta_1(\lambda)=(\lambda-5)^2$$

وكثيرة الحدود المميزة الأصغرية لـ A_2 هي:

$$m_2(\lambda)=\Delta_2(\lambda)=(\lambda-5)^3$$

وبذلك فإن:

$$\Delta(\lambda)=\Delta_1(\lambda).\Delta_2(\lambda)=(\lambda-5)^2.(\lambda-5)^3$$

ولكن كثيرة الحدود الأصغرية لـ A هي:

$$m(\lambda)=\ell.c.m.\left[m_1(\lambda),m_2(\lambda)\right]=(\lambda-5)^3$$

وهو حجم أكبر مصفوفة خلايا جزئية قطرية.

تمرينات محلولة

1- لتكن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد كثيرة الحدود المميزة لـ A ثم استنتج $\det A, tr\, A$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -5 & -5\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 3 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\left[(\lambda-1)(\lambda+2\right] = \lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$$

واضح أن:

$$-trA=-(3+1-2)=-2=+a_2$$

$$(-1)^3\det =(-1)^3.|A|=-(-6)=+6$$

$$=a_0$$

2- بفرض أن:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

عندها فإن:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ -2 & \lambda-2 & -1\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-s\lambda^2+8\lambda-4$$

وأيضاً أن: $-trA=-(3+2+0)=-s=a_2$

$$(-1)^3 \det A = (-1)^3 (-4) = 4 = -a_0$$

3− لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ولتكن $p = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

مصفوفة نظامية عندها:

1− أوجد مقلوب المصفوفة P ثم أوجد المصفوفة B المشابهة للمصفوفة A .

2− بين أن للمصفوفتين المتشابهين A, B كثيرة حدود مميزة واحدة.

الحل:

لدينا:

$$\det p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

وبالتالي لها مقلوب:

$$p^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي المصفوفة B تكون:

$$B = p^{-1}.A.p \quad = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ولنفرض أن $\Delta(\lambda)$ هي كثيرة الحدود المميزة لـ A و $\Delta`(\lambda)$ هي كثيرة الحدود المميزة لـ B فيكون:

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\Delta`(\lambda) = \det[\lambda I - B] = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = \Delta(\lambda)$$

هذا يعني أن للمصفوفتين المتشابهتين A, B كثيرة حدود مميزة واحدة.

4− ليكن لدينا المؤثر الخطي التالي: $f : \Re^2 \to \Re^2$ والمعرف بالشكل:

$$f(x, y) = (x + 3y, x - y)$$

والمطلوب:

1- عين المصفوفة A للمؤثر الخطي بالنسبة لأساس النظامي:

$E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ للفضاء المتجهي $\Re^2$.

2- عين المصفوفة $A`$ للمؤثر الخطي f بالنسبة للأساس:

$B=\{b_1=(1,1),b_2=(1,2)\}$ للفضاء المتجهي $\Re^2$.

3- أوجد مصفوفة الانتقال p من الأساس E إلى الأساس B وبين أن المصفوفتين $A, A`$ متشابهتان ، أي أن:

$$A`= P^{-1}.AP$$

4- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمؤثر الخطي f .

الحل:

1- $f(1,0)=(1,1)=1e_1+1e_2$

$$f(0,1)=(3,-1)=3e_1-1e_2$$

وبالتالي فإن مصفوفة f بالنسبة للأساس E هي:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

2- من أجل إيجاد مصفوفة f بالنسبة للأساس B:

$$f(1,1)=(4,0)=8(1,1)-4(1,2)$$

$$f(1,2)=(7,-1)=15(1,1)-8(1,2)$$

وبالتالي فإن مصفوفة f بالنسبة للأساس B هي:

$$A`=\begin{bmatrix}8 & 15\\ -4 & -8\end{bmatrix}$$

3- من أجل إيجاد مصفوفة الانتقال P من الأساس E إلى الأساس B للفضاء $\Re^3$

نضع:

$$\left.\begin{array}{l} b_1=(1,1)=1.e_1+1.e_2\\ b=(1,2)=1.e_1+2.e_2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

وأن مقلوب المصفوفة P هو:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$P^{-1}.A.P=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & +1\\ +1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 0 & -4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 15\\ -4 & -8\end{bmatrix}=A`$$

أي أن المصفوفتين $A, A`$ للمؤثر الخطي f بالنسبة للأساسين B و E متشابهتان.

4- لإيجاد كثيرة الحدود المميزة لـ f على الفضاء المتجهي $\Re^2$. نوجد كثيرة الحدود المميزة لإحدى المصفوفتين A أو $A`$ فمثلاً إن:

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -3\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)-3$$

$$= \lambda^2 - 4$$

5- لتكن

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

مصفوفات مربعة والمطلوب:

1- أوجد كثيرة الحدود لكل مصفوفة ومن ثم تحقق من مبرهنة كيلي – هاملتون

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A وهي $\Delta_1(\lambda)$ هي:

$$\Delta_1(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-2 & -5\\ -1 & \lambda+3\end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-11$$

حتى تتحقق مبرهنة كايلي – هاملتون من أجل المصفوفة A ، بحيث نثبت أن A هي صفر لكثيرة حدودها المميزة $\Delta_1(\lambda)$:

$$\Delta_1(A)=A^2+A-11I$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن المصفوفة A هي صفر كثيرة حدودها المميزة.

- من أجل المصفوفة B فإن كثيرة الحدود المميزة لـ B هي $\Delta_2(\lambda)$ في:

$$\Delta_2(\lambda)=|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -3\\ 0 & \lambda-3 & -1\\ 0 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+5$$

ومن ثم فإن:

$$\Delta_2(B)=B^3-3B^2-3B+5I$$

$$\Delta_2(B)=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^3-3\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$
$$+5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 42 & 3\\ 0 & 37 & 9\\ 0 & 18 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 10 & 4\\ 0 & 11 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن $\Delta_2(B)=0$ وبالتالي مبرهنة كيلي- هاملتون محققة من أجل المصفوفة B.

وأخيراً فإن:

$$\Delta_3(\lambda)=|\lambda I-C|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda+1 & -5\\ -3 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-\lambda^2-24\lambda-36$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta_3(C)=C^3-C^2-24C-36I$$

ومنه وبالتبديل بالمصفوفة C نجد:

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}-24\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}-36\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}74 & 54 & 88\\ 63 & 27 & 126\\ 82 & 54 & 80\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & 6 & 16\\ -15 & 15 & 6\\ 10 & 6 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}24 & 48 & 72\\ 48 & -24 & 120\\ 72 & 48 & 24\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\ 0 & 36 & 0\\ 0 & 0 & 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ما يعني أخيراً أن $\Delta(C)=0$ وهذا يعني أيضاً أن مبرهنة كيلي – هاملتون محققة من أجل المصفوفة C .

6- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة التالية ، ثم أوجد مقلوبها باستخدام مبرهنة كيلي – هاملتون:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 1\\ -4 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-\lambda^2+2\lambda+28$$

وبحسب مبرهنة كيلي – هاملتون فإن المصفوفة A هي صفر لكثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ وبالتالي فإننا نجد:

$$A^3-A^2+2A+28I=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{28}\left[A^3-A^2+2A\right]=I$$

ومن ثم نجد أن:

$$A^{-1}=-\frac{1}{28}\left[A^2-A+2I\right]$$

$$=-\frac{10}{28}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}^2+\frac{1}{28}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}-\frac{2}{28}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{28}\begin{pmatrix}-5 & 9 & -3\\ -10 & -2 & 0\\ -4 & 12 & 4\end{pmatrix}-\frac{1}{28}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{28}\begin{pmatrix}-4 & 6 & -3\\ -8 & -2 & 1\\ -8 & 12 & 8\end{pmatrix}$$

7– بفرض أن A مصفوفة مربعة حيث $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$ والمطلوب:

1– أوجد مقلوب المصفوفة A باستخدام مبرهنة كيلي – هاملتون .

2– أوجد القوى التالية A^{-2}, A^4, A^3 وذلك اعتماداً على نفس المبرهنة كيلي– هاملتون .

الحل:

1– إن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -4\\ -2 & -5 & \lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-10\lambda^2+3\lambda-1$$

وحسب مبرهنة كيلي- هاملتون فإن المصفوفة A صفر لكثيرة حدودها المميزة $\Delta(\lambda)$ وبالتالي فإننا نجد:

$$A^3-10A^2+3A-I=0$$

$$\Rightarrow A^3-10A^2+3A=I$$

وبالتالي فإن:

$$A^{-1}=A^2-10A+3I$$

نبدل:

$$=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&4\\2&5&6\end{bmatrix}^2-10\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&4\\2&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&13&15\\12&31&37\\19&19&58\end{bmatrix}-10\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&4\\2&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&-7&5\\2&4&-3\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

2- لدينا : $\Delta(\lambda)=\lambda^3-10\lambda^2+3\lambda-1$

وبحسب المبرهنة (كيلي – هاملتون) فإن:

$$\Delta(A)=A^3-10A^2+3A-I=0$$

$$\Rightarrow A^3=10A^2-3A+I$$

$$=10.\begin{bmatrix}5&13&15\\12&31&37\\19&49&58\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&4\\2&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}48&124&147\\117&302&358\\184&475&563\end{bmatrix}$$

ولحساب A^4 لدينا:

$$A^3 = 10A^2 + 3A - I \Rightarrow$$

$$A^4 = 10A^3 + 3A^2 - A$$

$$= 10\begin{bmatrix} 48 & 124 & 147 \\ 117 & 302 & 358 \\ 184 & 475 & 563 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 13 & 15 \\ 12 & 31 & 37 \\ 19 & 49 & 58 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 494 & 1277 & 1514 \\ 1205 & 3110 & 3679 \\ 1895 & 4892 & 5798 \end{bmatrix}$$

ولإيجاد A^{-2} نأخذ العلاقة:

$$A^{-1} = A^2 - 10A + 3I$$

وبضرب طرفي العلاقة بـ A^{-1} نجد:

$$A^{-2} = A - 10I + 3A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & -19 & 16 \\ 7 & 5 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} -15 & -19 & 16 \\ 7 & 5 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

8− أوجد كثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-2)$$

وبالتالي فكثيرة الحدود الأصغرية $m(\lambda)$ للمصفوفة A هي إحدى كثيرات الحدود التالية:

$$m_1(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)$$
$$m_2(\lambda)=(\lambda+2)^2.(\lambda-2)$$

لنحسب أولاً:

$$m_1(A)=(A+2I)(A-2I)$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&0&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

وهذا يعني ان المصفوفة A هي صفر لكثيرة الحدود أي:

$$m_1(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)=\lambda^2-4$$

وبالتالي كثيرة الحدود الأصغرية: $m(\lambda)=\lambda^2-4$

9- أوجد كثيرة الحدود الصغرى للمصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة لـ A هو:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3$$

وبالتالي كثير الحدود ألأصغري $m(\lambda)$ للمصفوفة A هو أحد كثيرات الحدود:

$$m_1 = \lambda \qquad m_2 = \lambda^2 \qquad m_3 = \lambda^3$$

وبسهولة نجد أن : $m(\lambda) = \lambda^3$

9- أوجد كثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

وذلك بطريقتين مختلفتين:

الحل:

طريقة (1) لدينا:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 & -2 \\ -6 & \lambda + 3 & -4 \\ -3 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

وبما أن $m(\lambda) \backslash \Delta(\lambda)$ وكل عامل غيرخزول في $\Delta(\lambda)$ يكون عاملاً في $m(\lambda)$.

إذاً كثيرة الحدود الصغرى $m(\lambda)$ يجب أن تكون إحدى كثيرتي الحدود:

$$m_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

أو

$$m_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

وبما أن:

$$m_1(A) = (A - I)\ (A - 2I)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن: $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

طريقة ثانية:

لنحسب أولاً المصفوفة الملحقة لـ $(\lambda I - A)$.

لدينا: $$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ -6 & \lambda+3 & -4 \\ -3 & 2 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ad_J(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda^2-1 & 6\lambda-6 & 3\lambda-3 \\ -2\lambda+2 & \lambda^2-7\lambda+6 & -2\lambda+2 \\ 2\lambda-2 & -4\lambda+4 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda-1)(\lambda+1) & 6(\lambda-1) & 3(\lambda-1) \\ -2(\lambda-1) & (\lambda-1)(\lambda-6) & -2(\lambda-1) \\ 2(\lambda-1) & -4(\lambda-1) & \lambda(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

والقاسم المشترك الأعظم $g(X)$ لعناصر المصفوفة $ad_J(\lambda I - A)$ هو $g(\lambda)=(X-1)$ وبالتالي:

$$m(X)=\frac{\Delta(\lambda)}{g(\lambda)}=\frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}{\lambda-1}=(\lambda-1)(\lambda-2)$$

10- ليكن لدينا المؤثر الخطي: $f:\Re^3 \to \Re^3$ والمعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x+y,-x+z,x+3y+z)$$

والمطلوب:

1- أوجد كثيرة الحدود المميزة لـ f ، ثم أوجد كثيرة الحدود الأصغرية.

2- أوجد المؤثر الخطي f^4 . وعبر عن مصفوفته بدلالة مصفوفات المؤثرين f^2, f وكذلك مصفوفة المؤثر المطابق I .

3- أوجد المؤثر الخطي المعاكس f^{-1} .

الحل:

إن مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للأساس النظامي هي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمؤثر f هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+4$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

كما أن كثيرة الحدود الأصغرية $f=m(\lambda)$ هو احدى كثيرتي الحدود:

$$m_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$$

أو

$$m_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

نحسب أولاً:

$$m_1(A)=(A-2I)(A+I)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\neq 0$$

وبسهولة نستنتج أن: $m(\lambda)=m_2(\lambda)=(\lambda-2)^2.(\lambda+1)$

حسب مبرهنة كيلي – هاملتون:

2– نحن نعلم أن من أجل أي متجه $v\in\Re^3$ فإن:

$$f(v)=A.v$$

وبالتالي من أجل أي عدد صحيح موجب n يكون:

$$f^n(v)=\underbrace{(fo\ fo......of)}_{n}(v)$$

$$=\underbrace{(fo\ fo....of)}_{n-1}(Av)$$

أي أن:

$$=A^n v$$

$$f^n(v)=A^n.v$$

$$\Rightarrow A^4=A^2.A^2=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 14 & 9\\ -5 & 6 & 5\\ -4 & 24 & 20\end{bmatrix}$$

وحسب ما سبق فإننا نجد أن:

$$=(7x+14y+9z,-5x+6y+5z,-4x+24y+20z)$$

وللتعبير عن المصفوفة A^4 بدلالة I ، A ، A^2 ، فإن علينا أن نبحث عن الأعداد a,b,c من $\Re$ والتي من أجلها تتحقق العلاقة:

$$A^4 = aA^2 + bA + cI$$

ووجدنا في الطلب الأول أن كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

وبما أن A هي صفر لـ كثيرة الحدود المميزة حسب كيلي – هاملتون فإنه يكون:

$$A^3 - 3A^2 + 4I = 0$$

ومنه:

$$A^3 = 3A^2 - 4I$$

وبضرب طرفي العلاقة السابقة بـ A نحصل على:

$$A^4 = 3A^3 - 4A$$

$$= 3(A^2 - 4I) - 4A = 3A^2 - 4A - 12I$$

$$\Rightarrow A^4 = 3A^2 - 4A - 12I$$

3- إن مصفوفة المؤثر الخطي f^{-1} هي A^{-1} ، لذلك من أجل حساب A^{-1}

نلجأ إلى كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ أو كثيرة الحدود الأصغرية $m(\lambda)$ وهو أسهل. لدينا:

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \Delta(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \end{aligned}$$

ولما كانت A جذرا لها فإن:

$$A^3 - 3A^2 + 4I = 0 \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{4}\left[-A^3 + 3A^2\right] \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\left[-A^2 + 3A\right]$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}\left(+ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن المؤثر الخطي المعاكس: $f^{-1} : \Re^3 \to \Re^3$

معرف بالشكل:

$$f^{-1}(x,y,z)=A^{-1}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&-1&1\\2&2&-2\\-3&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-1}{4}\left(-3x-y+z,\ 2x+2y-2z,\ -3x-5y+z\right)$$

11- أوجد كثيرة الحدود المميزة و الأصغرية لمصفوفة الخلايا المثلثية ثم أوجد مقلوبها:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-2&4\end{bmatrix}$$

الحل:

لدينا A مصفوفة خلايا مثلثية قطرية جزئية وهي:

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي: $\Delta(\lambda)=\Delta_1(\lambda)\cdot\Delta_2(\lambda)$

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-2)^2.(\lambda-3)(\lambda-2)$$

$$=(\lambda-2)^3.(\lambda-3)$$

ولحساب كثيرة الحدود الصغرى (حسب مبرهنة) فإن:

$$m(\lambda)=\ell.c.m[m_1(\lambda),m_2(\lambda)]$$

$$=l.c.m\left[(\lambda-2)^2,(\lambda-2)(\lambda-3)\right]$$

$$=(\lambda-2)^2.(\lambda-3)$$

حيث إن $m_1(\lambda)=(\lambda-2)$ كثيرة الحدود الصغرى لـ A_1

و $m_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+3)$ كثيرة الحدود الصغرى لـ A_2 .

ومنه فإن:

$$m(\lambda)=(\lambda^2-4\lambda+4)(\lambda-3)=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda-3\lambda^2+12\lambda-12$$

$$\Rightarrow A^3-7A^2+16A-12I=0\Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{12}\left(+A^3-7A^2+16A\right)\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{12}\left(+A^2-A+2I\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\left(\left[A^2-7A+16I\right]\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-2&4\end{bmatrix}^2-7\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-2&4\end{bmatrix}+16\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\begin{bmatrix}4&4&0&0\\0&4&0&0\\0&0&-1&5\\0&0&-10&14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&7&0&0\\0&2&0&0\\0&0&9&-7\\0&0&14&-12\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6&-3&0&0\\0&6&0&0\\0&0&8&-2\\0&0&4&2\end{pmatrix}$$

12- بفرض A مصفوفة مربعة من الشكل:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0&0\\2&4&0&0&0\\0&0&2&6&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$$

والمطلوب:

أ- أوجد كثيرة الحدود المميزة ، وكثيرة الحدود الأصغرية.

ب- ثم اوجد مقلوب المصفوفة A اعتماداً على كثيرة حدودها الأصغرية.

الحل:

أ- الحدودية المميزة لـ A وهي $\Delta(\lambda)$

نلاحظ أولاً أن A هي مصفوفة خلايا قطرية بمصفوفات جزئية قطرية:

$$A_3=(5)\quad,\quad A_2=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ ,\ A_1=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

إذن $\Delta(\lambda)$ هي جداء كثيرات الحدود المميزة $\Delta_1(\lambda),\Delta_2(\lambda),\Delta_3(\lambda)$ لـ $A_1\,,A_2\,,A_3$ على الترتيب.

لدينا:

$$\Delta_1(\lambda)=|\lambda I-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-4)-2$$

$$=\lambda^2-7\lambda+10=(\lambda-2)(\lambda-5)$$

$$\Delta_2(\lambda)=|\lambda I-A_2|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -6\\ 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$$

$$\Delta_3(\lambda)=|\lambda I-A_3|=(\lambda-5)$$

وبذلك تكون:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-2)^3.(\lambda-5)^2$$

كثيرة الحدود الصغرى لـ A :

نلاحظ أن كثيرات الحدود الصغرى $m_1(\lambda),m_2(\lambda),m_3(\lambda)$ للمصفوفات الجزئية القطرية $A_1\,,A_2\,,A_3$ على الترتيب مساوية لكثيرات الحدود المميزة.

أي أن:

$$m_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)$$

$$m_2(\lambda)=(\lambda-2)^2$$

$$m_3(\lambda)=(\lambda-5)$$

ولكن $m(\lambda)$ لـ A تساوي المضاعفات المشترك الأصغر لـ $m_1(\lambda),m_2(\lambda),m_3(\lambda)$

أي أن:

$$m(\lambda)=\ell.c.m\left[(\lambda-2)(\lambda-5)\ ,(\lambda-2)^2,(\lambda-5)\right]$$

$$=(\lambda-2)^2.(\lambda-5)$$

أي أن:

$$m(\lambda)=(\lambda^2-4\lambda+4)(\lambda-5)$$

$$=\lambda^3-9\lambda^2+24\lambda-20$$

وبما أن A هي جذر لـ $m(\lambda)$ حسب كيلي− هاملتون فإن:

$$A^3 - 9A^2 + 24A - 20I = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{20}\left[A^3 - 9A^2 + 24A\right] \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\left[A^2 - 9A + 24I\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^2 - 9\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 24\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\left(\begin{bmatrix} 11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + 24.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0-30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد كثيرة الحدود المميزة لكل من المصفوفات التالية:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -17 & 1 & 10 \\ 18 & 0 & -10 \\ -18 & 2 & 12 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2- احسب كثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفات التالية، ثم استعمل الحدودية الأصغرية في حساب A^{-1} إذا كانت المصفوفة نظامية.

$$1)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2)\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 5)\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad 6)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3- بفرض أن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية والمطلوب:

أ- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A .

ب- أثبت أن $\Delta(A) = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$ ، ماذا نستنتج؟

4- أوجد كثيرتي الحدود المميزة والأصغرية، لكل من المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5- احسب المصفوفة الملحقة لـ $(\lambda I - A)$ من أجل كل من المصفوفات التالية:

$$1.A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}\ ;\ 2.B=\begin{bmatrix}2 & -4 & -4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

واكتب $\Gamma(\lambda I - A)$ على الشكل $\lambda^2 C_2 + \lambda C_1 + C_0$

6- احسب القاسم المشترك الأكبر لعناصر المصفوفات

$adj\,(\lambda I - A)\ ,\ adj\,(\lambda I - B)$ في التمرين 5 ، ثم أوجد بالاعتماد عليه، كثيرة الحدود الأصغرية لكل من A , B .

7- أوجد كثيرة الحدود المميزة وكثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفات التالية:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -1 & 6 & 0\\ 3 & -7 & 8\end{pmatrix}$$

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

8- أوجد كثيرة الحدود المميزة والأصغرية لكل من المصفوفتين العقديتين التاليين:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 3\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}1+i & 0 & 0\\ -2i & 1+i & 2i\\ i & 0 & 1\end{pmatrix}$$

9- حقق مبرهنة كيلي – هاملتون لكل من المصفوفات التالية ثم استنتج A^{-1} .

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -5 & 0\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

10- حقق مبرهنة كيلي – هاملتون لكل من المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & -10 & 2 \\ 5 & -2 & -5 & 1 \\ 6 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 15 \\ 5 & 8 & 15 \\ -5 & -5 & -12 \end{pmatrix}$$

ثم استنتج كثيرة الحدود الأصغرية لـ A .

11- لتكن المصفوفة: $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ والمطلوب:

1) برهن أن: $A^3=4A^2-5A+2I$

2) أوجد كلاً من A^5,A^4 بدلالة المصفوفات I,A,A^2 .

3) أوجد A^{-1} للمصفوفة A .

12- أوجد كثيرة الحدود المميزة وكثيرة الحدود الصغرى لكل من المؤثرات الخطية التالية.

$$1)\ f:\Re^2\to\Re^2\ ;\ f(x,y)=(2x-y,3x+2y)$$

$$2)\ f:\Re^3\to\Re^3\ ;\ f(x,y,z)=(x-z,y,z)$$

$$3) f:\Re^4\to\Re^4\ ;\ f(x,y,z,t)=(8x+5y,6z-2y,-10x-5y-8z,2x+y+z+2t)$$

12- من أجل ل من المصفوفات التالية:

$$1.\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix},\ 2.\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\ 3.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1- احسب كثيرتي الحدود المميزة والصغرى.

2- احسب A^5,A^4 .

3- احسب مقلوب المصفوفات السابقة بالاعتماد على كثير الحدود المميزة، ومن ثم بالاعتماد على كثيرة الحدود الأصغرية.

14- طبق مبرهنة كيلي – هاملتون في حساب كثيرة الحدود:

$$P(A)=A^5+A^4-2A^3+A^2+A-3I$$

من أجل كل من المصفوفات:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-2&-3\\-2&2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&4\\5&2&-3\end{pmatrix}$$

15- أوجد كلاً من كثيرة الحدود المميزة وكثيرة الحدود الأصغرية للمصفوفات التالية:

$$1.\begin{bmatrix}2&5&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&4&2&0\\0&0&3&5&0\\0&0&0&0&7\end{bmatrix}\quad 2.\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}\quad 3.\begin{bmatrix}x&0&0&0&0\\0&x&0&0&0\\0&0&x&0&0\\0&0&0&x&0\\0&0&0&0&x\end{bmatrix}$$

16- بفرض $f:\Re^3\rightarrow\Re^3$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x+y,y-z,z-2x)$$

والمطلوب:

1- أوجد كلاً من كثيرتي الحدود المميزة والأصغرية لهذا المؤثر.

2- عين مصفوفة المؤثر الخطي f^3 بالنسبة للأساس النظامي.

3- أوجد f^{-1} .

17- ليكن المؤثر الخطي f على $\Re^3$ والمعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(o,y,x)$$

والمطلوب.

أوجد كثيرة الحدود المميزة لكل من المؤثرات الخطية f, f^2, f^3

18- أوجد كثيرة الحدود بحيث تكون كل من المصفوفات التالية جذراً لها:

$$A=\begin{bmatrix}5&2\\-3&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&-3\\7&-4\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&4&-3\\0&3&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

الفصل الثالث

المتجهات الذاتية والقيم الذاتية

Eigen Vectors and Eigen Values and Diagonalization

(3−1) الفضاء الجزئي اللامتغير Invariant Subspace

تعريف (1−1):

ليكن V فضاءً متجهياً ، وليكن $U \subseteq V$. نقول إن الفضاء الجزئي U لا متغير بالنسبة للمؤثر f ، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$f(U) \subseteq U$$

أي إذا كان :

$$\forall x \in U \Rightarrow f(x) \in U$$

مثال (1−1):

الفضاءان الجزئيان V و $\{0\}$ من الفضاء المتجهي V لا متغيران بالنسبة لأي مؤثر خطي على الفضاء المتجهي V.

مثال (1−2):

كل فضاء جزئي $U \subseteq V$ هو لا متغير بالنسبة للمؤثرين المطابق و الصفري.

مثال (1−3):

ليكن $f: V \to V$ مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهيV. عندئذ يكون الفضاءان $\ker f$ و $\operatorname{Im} f$ لا متغيرين بالنسبة للمؤثر f.

الحل:

بما أن $f(u) = 0$ لكل $u \in \ker f$ وبما أن $0 \in \ker f$. إذاً $f(\ker f) \subseteq \ker f$، وكذلك فإن:

$$f(\operatorname{Im} f) = f(f(V)) \subseteq f(V) = \operatorname{Im} f$$

مثال (1−4) :

ليكن: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثراً خطيّاً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, Z)$$

عندها إن المحور OZ والذي هو فضاء جزئي U من $\mathbb{R}^3$ لا متغير بالنسبة للمؤثر f وذلك لأنه يكون لدينا $f(u)=u$ من أجل أي متجه $U \ni u=(o,o,z)$.
وهذا يعني أن U لا متغير بالنسبة لـ f وهنا تقييد f على U هو المؤثر المطابق على U.

مثال (1−5) :

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهيV ، و ليكن g مؤثراً خطياً على V تبادلياً مع f أي:

$$fog = gof$$

لقد رأينا في المثال (1−3) أن $\operatorname{Im} f, Ker f$ لامتغيران بالنسبة لـ f وسنثبت أن $\operatorname{Im} f, Ker f$ لا متغيران بالنسبة لـ g.

الحل:

إذا كان $u \in \operatorname{Im} f$ إذا يوجد $x \in V$ بحيث يكون $u = f(x)$ ولنحسب $g(u)$:

$$g(u) = g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f$$

وهذا يعني أن $\operatorname{Im} f$ لا متغير بالنسبة للمؤثر.

كذلك إذا كان $v \in ker f$ فإن $f(v) = 0$ ومنه:

$$g(f(v)) = g(0) = 0 \Rightarrow f(g(v)) = 0 \Rightarrow g(v) \in \ker f$$

وهذا يعني أن $ker f$ لا متغيرا بالنسبة لـ g.

مثال (1−6):

ليكن $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$f(x,y,z) = (x+2y, y-z, 2x+2y-z)$$

عندها إن الفضاء الجزئي $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = z\}$ من الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$ هو فضاء لا متغير بالنسبة للمؤثر الخطي السابق f على $\mathbb{R}^3$.

البرهان:

ليكن $u=(x,y,z)$ متجه اختياري من U ويجب أن نثبت أن $f(u)\in U$.

$$u=(x,y,z)\in U \Rightarrow x=z \Rightarrow u=(x,y,x)$$

وبالتالي:

$$f(u)=f(x,y,x)=(x+2y,y-x,2x+2y-x)$$
$$=(x+2y,y-x,x+2y)\in U$$

وهذا يعني أن $f(u)\in U$ ، وأن Uهو فضاء جزئي لا متغير بالنسبة لـ f .

مبرهنة (1−1):

ليكن V فضاءً متجهياً على حقل F. الشرط اللازم والكافي لوجود فضاء جزئي لا متغير في الفضاء V بالنسبة لمؤثر خطي ما ، هو أن تكون مصفوفة المؤثر في أساس ما للفضاء V مصفوفة خلايا مثلثية.

البرهان:

لزوم الشرط: ليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي V، حيث $dim\,V=n$، و $n\neq 0$، وليكن $U\subseteq V$ فضاءً جزئياً غير تافه ولا متغيراً بالنسبة للمؤثر f. ليكن $dim\,U=m$. عندئذ يوجد أساس للفضاء الجزئي U وليكن $B_1=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$.نقوم بإتمام الأساس B_1 إلى أساس للفضاء V، لنحصل على المجموعة : $B_2=\{u_1,u_2,\dots,u_m,u_{m+1},\dots,u_n\}$

التي تشكل أساساً للفضاء V. نريد إيجاد A مصفوفة المؤثر f بالنسبة للأساس B_2. بما أن

$$f(u_1)=a_{11}u_1+a_{21}u_2+\cdots+a_{m1}u_m\,,\quad (3-1)$$
$$f(u_2)=a_{12}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{m2}u_m\,,$$
$$\dots\ \dots\dots$$
$$f(u_m)=a_{1m}u_1+a_{2m}u_2+\cdots+a_{mm}u_m,$$

وكذلك فإن:

$$f(u_{m+1})=a_{1m+1}u_1+a_{2m+1}u_2+\cdots+a_{m\,m+1}u_m + a_{m+1\,m+1}u_{m+1}+\cdots+a_{n\,m+1}u_n\,,$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$f(u_n) = a_{1\,n}u_1 + a_{2\,n}u_2 + \cdots + a_{m\,n}u_m + a_{m+1\,n}u_{m+1} + \cdots + a_{n\,n}u_n\ ,$$

ويكون للمؤثر f في الأساس B_2 المصفوفة A المعطاة بالشكل الآتي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \\ 0 & \cdots & \dots & 0 & a_{m+1m+1} & \cdots & \cdots & a_{m+1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 & a_{n\,m+1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة الخلايا المثلثية.

كفاية الشرط: ليكن $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساساً للفضاء V. وليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء V معطى بدلالة مصفوفة الخلايا المثلثية. عندئذ العلاقة (3-1) تكون محققة. إذاً الفضاء الجزئي U المولّد بالمتجهات $u_1, u_2, \dots, u_m$ يكون لا متغيراً بالنسبة للمؤثر f.

نتيجة (1−1):

ليكن V فضاءً متجهياً على حقل F. عندئذ يمكن كتابة V على شكل مجموع مباشر لفضاءين جزئيين لا متغيرين بالنسبة للمؤثر f على الفضاء V إذا وفقط إذا كانت مصفوفة f بالنسبة لأساس ما هي مصفوفة خلايا قطرية.

البرهان:

ليكن $V = U_1 + U_2$ ، حيث إن U_1, U_2 فضاءان جزئيان لـ V لا متغيران بالنسبة لمؤثر ما f.نفرض أن $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ يشكل أساساً للفضاء U_1، و$\{u_{m+1}, \dots, u_n\}$ أساساً للفضاء U_2. وبالتالي فإن $f(u_i)$، حيث $1 \le i \le m$ نحصل عليها بدلالة التراكيب الخطية للمتجهات $u_1, u_2, \dots, u_m$، وأيضاً $f(u_i)$، حيث $m+1 \le i \le n$ نحصل عليها بدلالة التراكيب الخطية للمتجهات $u_{m+1}, \dots, u_n$ ، وبالتالي فإن:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

نتيجة (1−2):

يمكن تعميم النتيجة السابقة على النحو التالي:

إذا كان $V=U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_n$ حيث كل U_i فضاء جزئي لا متغير بالنسبة لـ f وإذا كان B_i أساً لـ U_i لكل i فإن مصفوفة f بالنسبة للأساس $B=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ هي مصفوفة الخلايا القطرية.

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

حيث A_i المصفوفة التي تمثل المؤثر على U_i المحدد بـ f ومن ثم فإن A_i من النوع $\dim U_i x \dim U_i$. وبكلام آخر مصفوفة مربعة وهي مصفوفة مقصور f على U_i .

(2−3) المتجهات الذاتية و القيم الذاتية

Eigen Vectors and Eigen Values

تعريف (2−1):

ليكن V فضاءً متجهياً منتهي البعد على حقل F ، وليكن f مؤثراً خطياً على V. يقال إن $\lambda\in F$ تشكل قيمة ذاتية للمؤثر f إذا وجد $v\neq 0$ ، بحيث يكون $f(v)=\lambda v$.

نسمي v متجهاً ذاتياً للمؤثر f موافقاً للقيمة الذاتية λ.

ملاحظة (2−1):

يمكن تعريف المتجه الذاتي والقيمة الذاتية لمصفوفة وذلك بالشكل الآتي:

المتجه الذاتي للمصفوفة A هو مصفوفة العمود غير الصفري X من النوع $n\times 1$ على حقل F والتي يتحقق من أجلها العلاقة $AX=\lambda X\ ;\ \ \lambda\in F$.

كما نسمي λ قيمة ذاتية للمصفوفة A الموافقة للمتجه الذاتي X.

مثال (2−1):

ليكن $I:V\to V$ هو التطبيق المطابق لـ أي فضاء متجهي V غير صفري. بيّن أن $\lambda=1$ قيمة ذاتية لـ I ثم أوجد متجهاً ذاتياً مقابلاً.

الحل:

لدينا $I(v)=v=1.v$ من أجل كل $v\in V$ وهذا يعني أن $\lambda=1$ قيمة ذاتية لـ I .
كما أن $E_{\lambda=1}=v$ لأن كل متجه في V هو متجه ذاتي مقابل للقيمة $\lambda=1$.

مثال (2−2):

لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة بيّن أن:

أ) $v_1=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$ متجه ذاتي لـ A مقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=4$.

ب) $v_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ متجه ذاتي مقابل للقيمة $\lambda_2=-1$ لـ A.

الحل:

لدينا:

أ) $$Av_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 12\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=4v_1$$

وبذلك يكون v_1 متجهاً ذاتياً مقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=4$.

ب) $$Av_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=(-1)v_2$$

وبذلك يكون v_2 متجهاً ذاتياً مقابلاً للقيمة الذاتية $\lambda_2=-1$.

مبرهنة (2−1):

ليكن V فضاءً متجهياً منتهي البعد على حقل F، وليكن f مؤثراً خطياً على V. عندئذ يتحقق مايلي:

(1) − يقابل كل متجه ذاتي للمؤثر f قيمة ذاتية وحيدة.

(2) – إذا كان v متجهاً ذاتياً للمؤثر f تقابله القيمة الذاتية λ و كان $\alpha \in F$، $\alpha \neq 0$، فإن αv متجه ذاتي لـ f تقابله القيمة الذاتية λ.

(3) – إذا قابلت القيمة الذاتية λ متجهين ذاتيين مستقلين خطّياً، فإن λ قيمة ذاتية لمجموعهما.

(4) – يكون المتجهان الذاتيان للمؤثر الخطي f مستقلين إذا قابلتهما قيمتان ذاتيتان مختلفتان.

البرهان:

(1) – نفرض العكس، أي أن $\lambda_1, \lambda_2 \in F$; $f(v) = \lambda_2 v$, $f(v) = \lambda_1 v$، وبالتالي $\lambda_1 v = \lambda_2 v$، ومنه $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$. بما أن $v \neq 0$ إذاً $\lambda_1 = \lambda_2$.

(2) – ليكن v متجهاً ذاتياً للمؤثر f تقابله القيمة الذاتية λ.عندئذ:

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v).$$

إن $\alpha v \neq 0$ ، إذاً αv متجه ذاتي لـ f تقابله القيمة الذاتية λ.

(3) ليكن v_1, v_2 متجهين ذاتيين للمؤثر الخطي f ومستقلين خطياً تقابله القيمة الذاتية λ. عندئذ $v_1 + v_2 \neq 0$، ومنه

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

وبالتالي $f(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2)$.

(4) نفرض العكس، أي إن v_1, v_2 متجهان مرتبطان خطياً، هذا يعني أنه يوجد تركيب خطي غير تافه $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ يحقق العلاقة $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \neq 0$.
نفرض أن $\alpha_1 \neq 0$ ومنه نجد أن $v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 = t v_2$، و $t \neq 0$ وذلك لأن $v_1 \neq 0$.

حسب (2) نجد أن $t v_2$ متجه ذاتي للمؤثر f تقابله القيمة الذاتية λ_2. من جهة أخرى نجد أن λ_1 قيمة ذاتية للمؤثر f تقابل المتجه الذاتي $t v_2$، وبالتالي $\lambda_1 = \lambda_2$ وهذا تناقض. إذاً v_1, v_2 مستقلان خطياً.

مبرهنة (2–3):

ليكن V فضاءً متجهياً على حقل F ، وليكن f مؤثراً خطياً على V. لتكن λ قيمة ذاتية لـ f. عندئذ مجموعة المتجهات الذاتية لـ f تساوي المجموعة :

$\ker(\lambda I - f)\backslash\{0\}$.

البرهان:

لدينا $\ker(\lambda I - f) = \{v \in V : (\lambda I - f)(v) = 0\}$

ليكن $u \in \ker(\lambda I - f)\backslash\{0\}$. عندئذ $(\lambda I - f)(u) = 0$، أي :

$\lambda I(u) - f(u) = 0$. إذاً $f(u) = \lambda u$، وهذا يعني أن أي متجه غير صفري من المجموعة $\ker(\lambda I - f)$ يشكل متجهاً ذاتياً للمؤثر f.

العكس: ليكن v متجهاً ذاتياً للمؤثر f تقابله القيمة الذاتية λ، وبالتالي $f(v) = \lambda v$، ومنه نجد $\lambda v - f(v) = 0$، وبالتالي $\lambda I(v) - f(v) = 0$، ومنه

$(\lambda I - f)(v) = 0$، أي أن $v \in \ker(\lambda I - f)$. بما أن $v \neq 0$. إذاً

$v \in \ker(\lambda I - f)\backslash\{0\}$.

مبرهنة (2–4):

ليكن V فضاءً متجهياً على حقل F، ولتكن المجموعة $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساساً للفضاء V. ليكن f مؤثراً خطياً على V مصفوفته بالنسبة للأساس B هي

$A = [a_{ij}]$. يكون v متجهاً ذاتياً لـ f يقابل القيمة الذاتية λ إذا وفقط إذا كانت مصفوفة السطر $[x_1 \ldots x_n]$ تشكل حلاً غير صفري لجملة المعادلات الخطية الآتية:

$$[a_{ij}]x_i = 0 \ , \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

البرهان:

حسب المبرهنة (2–3) يلزمنا لإيجاد المتجهات الذاتية للمؤثر f المقابلة للقيمة الذاتية λ أن نوجد $\ker(\lambda I - f)$.

نفرض أن مصفوفة العمود لمركبات المتجه v بالنسبة للأساس B هي:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن مصفوفة العمود لمركبات المتجه $(\lambda I - f)(v)$ بالنسبة للأساس B هي $(\lambda I - f)X$، وبالتالي فإن:

$$[(\lambda I - f)(v)] = (\lambda I - A)X$$

وكما هو معلوم فإن $v \in \ker(\lambda I - f)$ إذا وفقط إذا كان $(\lambda I - A)X = 0$، والتي تكتب بالشكل الآتي:

$$(\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0 \ ,$$
$$-a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0 \ ,$$
$$\ldots \ldots \quad \ldots$$
$$-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \ .$$

إذاً يكون v متجهاً ذاتياً لـ f إذا وفقط إذا كانت مصفوفة السطر $[x_1 \ldots x_n]$ تشكل حلاً غير صفري لجملة المعادلات الخطية السابقة.

بعد أن عرّفنا القيم والمتجهات الذاتية لمصفوفة A أو لمؤثر خطي f ننتقل إلى كيفية حسابها.

لاحظ أولاً أن المعادلة $AX = \lambda X$ تكافئ المعادلة $\lambda I X = AX$ وهي تكافئ المعادلة $(\lambda I - A) X = 0$ حيث I هي المصفوفة الواحدية. والمعادلة الأخيرة تلقي الضوء على مسألة إيجاد القيم والمتجهات الذاتية ، حيث إنها تبين لنا أن المتجهات الذاتية هي مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $(\lambda I - A) X = 0$. فإذا علمنا القيمة الذاتية فإننا نقوم بحل النظام لإيجاد المتجهات الذاتية ، وإذا علمنا المتجهات الذاتية فإننا نستطيع إيجاد القيمة الذاتية بمقارنة عناصر X مع عناصر AX. أما إذا لم نعلم أياً من القيم الذاتية أو المتجهات الذاتية (وهذه هي الحالة في معظم الأحيان)، فإننا نعلم أن للنظام $(\lambda I - A) X = 0$ حلاً غير تافه إذا وفقط كانت المصفوفة $\lambda I - A$ ليس لها معكوس أي إذا وفقط إذا كان $\det(\lambda I - A) = 0$. وإذا اعتبرنا أن λ مجهول فإن $\det(\lambda I - A)$ عبارة عن كثيرة حدود في المجهول λ تسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A .

(كما مر معنا في الفصل الثاني)

ومما سبق نجد أنه لحساب القيم والمتجهات الذاتية لمصفوفة مربعة A يجب علينا اتباع الخطوات التالية:

1- نوجد كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

2- نحسب القيم الذاتية للمصفوفة A وهي عبارة عن حلول المعادلة المميزة $\Delta(\lambda) = 0$.

3− لكل قيمة ذاتية λ_i نحسب المتجهات الذاتية المقابلة لها وذلك بحل نظام المعادلات الخطي المتجانس $(\lambda_i I - A)\,X = 0$.

و سنوضح ذلك بالأمثلة.

مثال (2−3) :

عين القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

المعادلة المميزة هي:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

ولهذه المعادلة جذران هي $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$. وهاتان هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة . لتعيين المتجهين الذاتيين لهذه المصفوفة نقوم بحل النظام المتجانس $(\lambda I - A)\;X = 0$ والذي يمكن كتابته بالصورة:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من أجل القيمة $\lambda_1 = 2$ نبدل بالنظام السابق نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}$$

وبحل هذا النظام (حسب طريقة جاوس−جوردان) نجد أن:

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = t \Rightarrow x_1 = -t$$

و للنظام عدد لا نهائي من الحلول ولذلك يوجد عدد لا نهائي من المتجهات الذاتيّة المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ وعلى سبيل المثال $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي مقابل

للقيمة $\lambda_1 = 2$. بطريقة مماثلة تماماً نجد أن $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي مقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 3$.

مثال (2−4):

عين القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

القيم الذاتية هي جذور كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A وهي:

$$\lambda_1 = 1 \,,\ \lambda_2 = 2 \,,\ \lambda_3 = 3$$

ولإيجاد المتجهات الذاتيّة للمصفوفة A نحل النظام $(\lambda I - A)\ X = 0$ لقيم λ المختلفة.

عندما $\lambda_1 = 1$ نجد أن النظام يأخذ الصيغة:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس لحل أنظمة المعادلات نجد أنه يكافئ:

$$\left. \begin{aligned} -3x_1 - x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = 0, x_3 = \ \Rightarrow x_2 = t$$

ومنه فإن المتجه الذاتي هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ والذي يقابل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$.

وبنفس الطريقة نجد أن المتجهين $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هما متجهان ذاتيان يقابلان القيمتين الذاتيتين $\lambda_3 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

مثال (2−5):

عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

لدينا :

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -3 & -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\ [(\lambda - 3)\ (\lambda - 4) - 6] + 1 + (-2\lambda + 8 - 6) - 1$$

$$(6 + 3\lambda - 9)$$

وبالإصلاح نجد :

$$= \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = (\lambda - 1)^2\ (\lambda - 7)$$

ومنه فالمعادلة المميزة هي:

$(\lambda - 1)^2\ (\lambda - 7) = 0$ ومنه فإن: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = 7$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A (نلاحظ أن القيمة الذاتية λ =1 مكررة مرتين) ولحساب المتجهات الذاتية للمصفوفة A نقوم بحل نظام المعادلات الخطي المتجانس.

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -3 & -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من أجل القيمة $\lambda_1=\lambda_2=1$ نبدل بالنظام السابق:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس نجد:

$$x_1+x_2+x_3=0$$

وبوضع $x_2=t$ و $x_3=s$ نجد أن: $x_1=-t-s$

فإن المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة $\lambda=1$ هي :

$$\begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix}$$ حيث $t,s\in R$.

وعندما $\lambda_3=7$ نجد أن النظام السابق يأخذ الصيغة:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوص لحل النظام السابق نجد أنه يكافئ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=0 \\ -3x_2+2x_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

وبوضع $x_3=t$ نجد أنه : $x_2=\frac{2}{3}\,t$ وبالتالي فإن $x_1=\frac{1}{3}\,t$. ومنه فإن المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة $\lambda_3=7$ هي:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}t \\ \frac{2}{3}t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} .$$

ملاحظة (2−2):

عندما تكون درجة المصفوفة صغيرة نوعاً ما فإن الطريقة الأمثل لإيجاد كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ هي استخدام التعريف لإيجاد قيمة المحدد وهي بالنشر وفق أحد الصفوف أو الأعمدة مع مراعاة الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار. أما إذا كانت درجة المصفوفة كبيرة فإنه عادة ما يفضل استخدام خواص المحددات لتحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية (عليا أو سفلى) ومن ثم فإنه يسهل علينا إيجاد قيمة محددها.

ملاحظة (2−3):

إن مسألة حل المعادلة المميزة $\Delta(\lambda)=0$ لإيجاد القيم الذاتيّة لمصفوفة A يكون في غالب الأحيان أمراً صعباً للغاية،وذلك لأنه من المعلوم عدم وجود صيغة عامة لإيجاد جذور كثيرة حدود عندما يكون $n>4$.

ملاحظة (2−4):

من المحتمل أن يكون لكثيرة حدود معاملاتها أعداد حقيقية جذور مركبة ، ولذا فإنه من المتوقع أن يكون للمصفوفة A قيم ذاتيّة مركبة فعلى سبيل المثال إذا كانت $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ فإن:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

ومنه فإن $\lambda=\pm i$ هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A كما أن كلاً منهما عدد مركب و أن الكثير من التطبيقات الهامة على القيم الذاتيّة تتضمّن قيم ذاتية مركبة.

(3–3) الفضاءات الذاتية Eigen Spaces

تعريف (3–1):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء المنتهي البعد V على الحقل F. ولتكن $\lambda \in F$ قيمة ذاتية للمؤثر f. عندئذ فإن مجموعة جميع المتجهات الذاتية للمؤثر f الموافقة للقيمة الذاتية λ مع المتجه الصفري تشكل فضاءً يسمى الفضاء الذاتي للمؤثر f الموافق للقيمة الذاتية λ ويرمز له بالرمز V_λ، وهذا يعني أن:

$$V_\lambda = \{v \in V; f(v) = \lambda v\} \cup \{0\} = ker(\lambda I - f)$$

مثال (3–1):

أوجد أساساً للفضاءات الذاتية للمصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن المعادلة المميزة للمصفوفة A هي:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

والتي تكافئ $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

وبالتالي فإن القيم الذاتية تكون $\lambda_1 = 1 \, , \lambda_{2,3} = 2$

إذاً يوجد فضاءان ذاتيان للمصفوفة A.

حسب التعريف ،المتجه $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ يكون متجهاً ذاتياً للمصفوفة A موافقاً للقيمة الذاتية λ إذا وفقط إذا كان X حلاً غير تافه للمعادلة $(\lambda I - A)X = 0$، هذا يعني أن:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذا كان $\lambda = 2$. عندئذ نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بحل جملة المعادلات بطريقة غاوص نجد أن:

$$x_1 = -s\,, x_2 = t\,, x_3 = s$$

وبالتالي فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ هي المتجهات غير الصفرية من الشكل

$$X = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بما أن المتجهين, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ مستقلان خطياً، فإنهما يشكلان أساساً للفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 2$. إذا كان $\lambda = 1$، عندئذ نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بحل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوص نجد أن:

$$x_1 = -2s\,, x_2 = s\,, x_3 = s$$

وبالتالي فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ هي المتجهات غير الصفرية من الشكل:

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي المتجه $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ يشكل أساساً للفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

وقد لاحظنا أنه لأيجاد المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية λ لمصفوفة نقوم بحل نظام المعادلات المتجانس $(\lambda I - A)x = 0$

ولهذا النظام عدد غير منته من الحلول ومجموعة الحل هي فضاء جزئي من فضاء المتجهات R^n ونسميه الفضاء الذاتي المقابل للقيمة الذاتيّة λ ونرمز له بالرمز E_λ أي أن:

$$E_\lambda = \{x \in| R^n : Ax = \lambda x\}$$

ففي المثال (2–4) لدينا ثلاث قيم ذاتية مختلفة هي 3 ,2 ,1 ولذا فإنه يكون لدينا ثلاثة فضاءات ذاتية هي:

$$E_1=\{(0,t,0):t\in R\}$$

$$E_2=\left\{(-\frac{1}{2}t,t,t):t\in R\right\}$$

$$E_3=\{(-t,t,t):t\in R\}$$

كما نلاحظ $\dim E_1=\dim E_2=\dim E_3=1$. أما في المثال (5−2) فإننا وجدنا ثلاث قيم ذاتية غير مختلفة وإن إحداها مكررة مرتين وهي 7 , 1 , 1 ولذا فإننا نحصل على فضاءين ذاتين هما:

$$E_1=\{(-t-s,t,s):t,s\in R\}$$

$$E_7=\{(t,2t,3t):t\in R\}$$

ونلاحظ هنا أن $\dim E_1=2$ وأن $\dim E_7=1$.

ملاحظة (3−1):

لدينا في المثال (2-4) ثلاث قيم ذاتية مختلفة ، وإن بُعد كل من الفضاءات الذاتية المقابلة هو 1، وفي المثال (2-5) لدينا قيمة ذاتية بسيطة هي $\lambda=7$ ويقابلها فضاء ذات بُعده 1 وقيمة ذاتية مكررة مرتين هي $\lambda=1$ يقابلها فضاء ذاتي بُعده 2 . إن هذه الظاهرة ليست دائماً صحيحة ، حيث إنه من الممكن على سبيل المثال أن نجد قيمة ذاتية مكررة مرتين ولكن بُعد الفضاء الذاتي المقابل لها هو 1 كما في المثال التالي.

مثال (3−2):

عين القيم والفضاءات الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$$

الحل:

المعادلة المميزة هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0$$

إذن $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ هي القيمة الذاتية (مكرّرة مرتين) للمصفوفة A. الآن نظام المعادلات الخطي $(2I - A)X = 0$ يأخذ الصيغة: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ومنه نحصل على أن $-x_2 = 0$ ولذا فإن $E_2 = \{(t,0) : t \in R\}$ وبالتالي فإن $\dim E_2 = 1$. المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة الهامة بين المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية المختلفة والاستقلال الخطي.

مبرهنة (3−1):

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n وكانت $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_k$ هي القيم الذاتية المختلفة وكانت $X_1, X_2, ... X_k$ هي المتجهات الذاتية للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_k$ فإن $\{X_1, X_2, ... X_k\}$ مستقلة خطياً.

البرهان:

يستخدم الاستقراء الرياضي بالنسبة لـ K . إذا كانت $k = 1$ فإن من الواضح أن $\{X_1, X_2, ... X_{k-1}\}$ مستقلة خطياً لنفرض إذن أن: $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{n-1}, \alpha_n \in R$ حيث:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_{k-1} X_{k-1} + \alpha_k X_k = 0 \quad (1)$$

نضرب المساواة (1) من اليسار بالمصفوفة A وبالاستفادة من العلاقة $AX_i = \lambda_i X_i$ نجد انّ :

$$\alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + ... + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} X_{k-1} + \alpha_k \lambda_k X_k = 0 \qquad (2)$$

وبضرب المعادلة (1) بالعدد λ_k وطرح المعادلة (2) منها نحصل على :

$$\alpha_1 (\lambda_k - \lambda_1) X_1 + \alpha_2 (\lambda_k - \lambda_2) X_2 + ... + \alpha_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) X_{k-1} = 0$$

أي أن $\{X_1, X_2, ..., X_{k-1}\}$ مستقلة خطياً فإننا نجد أن:

$\alpha_i (\lambda_k - \lambda_i) = 0$ لكل $1 \le i \le k-1$. وبما أن القيمة الذاتية مختلفة فإن $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ لكل $| \le i \le k-1$ ولذا فإن $\alpha_i = 0$ لكل $| \le i \le k-1$. إذن $\alpha_k . X_k = 0$ ولكن $X_k \neq 0$ ولذا فإن $\alpha_k = 0$ وبالتالي فإن : $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ مستقلة خطياً.

ملاحظة (3−2):

إن عكس المبرهنة السابقة ليس صحيحاً في الحالة العامة وذلك لأنه من الممكن أن نحصل على قيم ذاتية غير مختلفة ولكن المتجهات الذاتية المقابلة لها مستقلة خطياً. ففي المثال (3−1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ قيم ذاتية مكررة مرتين وأن الفضاء الذاتي المقابل لها مولد بالمتجهين الذاتيين $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ وهي مستقلة خطياً.

نتيجة (3−3):

بفرض A مصفوفة من الدرجة n . إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة Aمختلفة فإنه يوجد أساس للفضاء R^n عناصره متجهات ذاتية.

مثال (3−3):

لقد وجدنا في المثال (3−1) أن القيمة الذاتية للمصفوفة من الدرجة 3 هي:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 7$ وأن $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ متجهات ذاتية . وهي متجهات مستقلة خطياً وذلك لأن محدد المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ هو 6 ولذا فإن B قابلة للعكس.

نورد الآن بعض الخواص الأساسية للقيم الذاتية:

مبرهنة (3−2):

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n عندها:

1) إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية (ليس بالضرورة جميعها مختلفة) للمصفوفة A فإن: $det\, A = \lambda_1 \bullet \lambda_2 \bullet \ldots \bullet \lambda_n$

2) لا يوجد للمصفوفة A معكوس إذ وفقط إذا كانت إحدى قيمها الذاتية صفراً.

البرهان:

1) لدينا $det\ (\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)....(\lambda - \lambda_n)$ لكل $\lambda \in R$ و

بشكل خاص إذا كانت $\lambda = 0$ فإن:

$$det\ (-A) = (-\lambda_1)(-\lambda_2)....(-\lambda_n)\ .$$

ومنه:

$$(-1)^n \det A = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 .... \lambda_n$$

وبالتالي

$$det\ A = \lambda_1 , \lambda_2 .... \lambda_n .$$

2) A ليس لها معكوس $det\ A = 0 \Leftrightarrow$ ومن (1) نجد أن :

$det\ A = 0 \ \ \lambda_1\, \lambda_2 .... \lambda_n = 0 \Leftrightarrow$ وهو المطلوب.

مثال (3−4):

لقد وجدنا في المثال (2−4) أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ في هذا المثال أن:

$$det\ A = 1.2.3 = 6$$

مبرهنة (3−3):

لتكن A مصفوفة من الدرجة n فإن:

1− القيم الذاتية للمصفوفة A هي نفس القيم الذاتية للمصفوفة A^T .

2− إذا كان للمصفوفة A معكوس وكانت λ قيمة ذاتية لها فإن λ^{-1} قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} .

البرهان:

1) لدينا

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)^T = \det(\lambda I^T - A^T) = \det(\lambda I - A^T)$$

ولذا فإن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A^T
.

2) لنفرض أن A لها معكوس وأن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A وليكن X المتجه الذاتي للمصفوفة A المقابل للقيمة الذاتية λ . وبما أن A لها معكوس فإن $\lambda \neq 0$ ومنه $AX = \lambda X \Rightarrow X = \lambda^{-1}.AX$

وبالتالي فإن:

$$A^{-1}X = A^{-1}(\lambda^{-1}.A.X) = \lambda^{-1}(A^{-1}.A).X = \lambda^{-1}.X$$

وبالتالي فإن: λ^{-1} قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} .

تعريف (3−2):

إذا كانت A , B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n . نقول إن B تشابه A إذا وجدت مصفوفة مربعة لها معكوس (نظامية) P بحيث يكون $A = p^{-1}.B.P$

مبرهنة (3−4):

إذا كانت B تشابه A فإن للمصفوفتين A, B نفس القيمة الذاتية.

البرهان:

لتكن P مصفوفة قابلة للعكس حيث $A = P^{-1}.BP$ عندئذ فإن:

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - P^{-1}B.P)$$

$$= \det(\lambda P^{-1}.I\,P - P^{-1}B.P)$$

$$= \det P^{-1}(\lambda I - B)P = \det P^{-1}.\det(\lambda I - B).\det P$$

$$= \det(\lambda I - B)$$

ومنه λ قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة B.

ما هي القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمؤثر الخطي؟

تعريف (3−3):

ليكن V فضاء متجهياً منتهي البعد بُعده n وليكن $f : V \to V$ مؤثراً خطياً. نقول إن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي f إذا وجد متجه غير صفري $o \neq v \in V$ بحيث يكون $f(v) = \lambda v$. المتجه v يسمى المتجه الذاتي

للمـــؤثر f المقابـــل للقيمـــة الذاتيـــة λ . كـــذلك نقـــول إن الفضـــاء $E_\lambda=\{v\in V: f(v)=\lambda v\}$ هو الفضاء الذاتي المقابل للقيمة الذاتية λ.

ملاحظة (3−3):

لـيكن V فضـاء متجهيـاً منتهـي البعـد ولـيكن B أساسـاً للفضـاء V ، عنـدها بسهولة يمكن التحقق من صحة العبارتين التاليتين:

1) القيمة الذاتية للمؤثر f هي نفس القيمة الذاتية للمصفوفة $[f]_B$.

2) يكـون المتجـه X متجهـاً ذاتيـاً للمـؤثر الخطـي f مقـابلاً للقيمـة الذاتيـة λ.إذا وفقط اذا كان $[X]_B$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة $[f]_B$ يقابل القيمة الذاتية λ.

نتيجة (3−4):

بنـاءً علـى الملاحظتـين السـابقتين نسـتنتج أنـه لتعيـيّن وحسـاب القـيم والمتجهـات الذاتيـة لمـؤثر خطـي f نختـار أساسـاً B للفضـاء ثـم نجـد المصـفوفة $[f]_B$ ومن ثم نحسب القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $[f]_B$.

مثال (3−5):

أوجـد القـيم والفضـاءات الذاتيـة للمـؤثر الخطـي $f: R^3\to R^3$ والمعـرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(4x+z,-2x+y,-2x+z)$$

الحل:

لنفـرض أن: $B=\{(1,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,(0,0,1)\}$ هـو الأسـاس النظـامي فـي الفضاء المتجهي R^3 عندها فإن:

$$f(1,0,0)=(4,-2,-2)=4(1,0,0)-2(0,1,0)-2(0,0,1)$$

$$f(0,1,0)=(0,1,0)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,1)$$

$$f(0,0,1)=(1,0,1)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+1(0,0,1)$$

فإن:

$$[f]_B=\begin{bmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$$

وهـــــذه هــــــي المصــــــفوفة الــــواردة فـــــي المثـــــال (2−4) ولــــــذا فـــــإن: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ هــي القيمــة الذاتيــة للمصــفوفة $[f]_B$ ومــن ثــم فهــي القيمة الذاتية للمؤثر الخطي f .

كذلك فإن $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هي أساسات الفضاء الذاتية.

E_1, E_2, E_3 علــى التــوالي للمصــفوفة $[f]_B$ (ومــن ثــم أساســات الفضــاءات الذاتية للمؤثر الخطي f).

مثال (3−6):

عـين القيمـة الذاتيـة وأساسـات للفضـاءات الذاتيـة للمـؤثر الخطـي $f : P_2 \to P_2$ والمعرف بالشكل:

$$f(ax^2 + bx + c) = (5c + 6b + 2a) - (b + 8a)x + (c - 2a)x^2$$

الحل:

لنأخذ الأساس النظامي في P_2 وهو $B = \{1, x, x^2\}$ الآن:

$$f(1) = 5 + x^2 = 5.(1) + 0.(x) + 1.(x^2)$$

$$f(x) = 6 - x = 6.(1) - 1.(x) + 0(x^2)$$

$$f(x^2) = 2 - 8x - 2x^2 = 2.(1) - 8(x) - 2(x^2)$$

ومنه فإن مصفوفة المؤثر الخطي بالنسبة للأساس B هي:

$$A = [f]_B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 8 \\ -1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 5)[(\lambda + 1)(\lambda + 2)] - 1(2\lambda - 46)$$

وبالإصلاح نجد:

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 1s\lambda + 36$$

$$= (\lambda - 3)^2 . (\lambda + 4)$$

إذاً $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ و $\lambda_3 = -4$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A.

عندما $\lambda = 3$ نجد أن النظام $(3I - A)X = 0$ يأخذ الصيغة:

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوص لحل النظام نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن نجد:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

وبوضع $x_3 = t$ نجد أن $x_2 = -2t$ و أن $x_1 = 5t$ إذن $u_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ أساس الفضاء الذاتي E_3 .

الآن إذا كان $p(x) = ax^2 + bx + c$ أساساً للفضاء الذاتي $E_3(f)$ فإن $[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $p(x) = 5x^2 - 2x + 1$ أساس للفضاء الذاتي $E_3(f)$ للمؤثر الخطي f . كما أنه وبنفس الطريقة نجد أن

$\begin{bmatrix} -2 \\ 8/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ أســـــاس للفضـــــاء الـــــذاتي E_{-4} . ولـــــذا فـــــإن:

$p(x)=-2x^{2}+\frac{8}{3}x+1$ أساس للفضاء الذاتي $E_{-4}(f)$.

ملاحظة (3−4):

إن القيمـة الذاتيـة للمـؤثر الخطـي لا تعتمـد علـى اختيـار الأسـاس لفضـاء المتجهات وذلك لأنه لو كان $f, V\to V$ مؤثراً خطياً وكانت كل من B_2 و B_1 أساس للفضاء V وكما نعلم أن $[f]_{B2}$ و $[f]_{B1}$ متشابهتان وبالتالي فإن لهما نفس القيمة الذاتية حسب المبرهنة (3−4).

وقد وجدنا في المبرهنة (3−1) إن المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية المختلفة لمصفوفة A مستقلة خطياً . والمبرهنة التالية هي نفس المبرهنة للمؤثرات الخطية وبرهانها مشابه لبرهان (3−1) ولذلك يترك كتمرين للطالب.

مبرهنة (3−4):

إذا كان f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهيV وكانت $v_1 , \dots , v_k$ هي المتجهات الذاتية للمؤثر الخطي f المقابلة للقيمة الذاتية المختلفة $\lambda_1 , \lambda_2 ,\dots, \lambda_k$ فإن $\{v_1 , v_2 ,\dots, v_k\}$ مستقلة خطياً .

(3−4) تقطير المصفوفات والمؤثرات الخطية:

لقد وجدنا أن مصفوفة المؤثر الخطي $f:V\to V$ تعتمد اعتماداً كلياً على اختيار أساس للفضاء V ، ولقد رأينا أيضاً أن كلاً من A,B مصفوفة للمؤثر الخطي f بالنسبة لأساسين للفضاء V(من الممكن أن يكونا مختلفين) إذا وفقط إذا كانت A, B متشابهتين ، أي أنه توجد مصفوفة نظامية P بحيث أن $B=p^{-1}.A.P$. وفي هذا البند سنعالج المسألتين المتكافئتين التاليتين:

(1) ليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً. والمطلوب هو إيجاد أساس B للفضاء V بحيث تكون $[f]_B$ مصفوفة قطرية.

(2) لتكن A مصفوفة مربعة،و المطلوب إيجاد مصفوفة نظامية (قابلة للعكس) P بحيث تكون $P^{-1}.AP$ مصفوفة قطرية.

(3–5) تقطير المصفوفات Diagonalization of Matrices

تعريف (5–1):

نقول إن المصفوفة المربعة A قابلة للتقطير (diagonalizable) إذا كانت A تشابه مصفوفة قطرية. أي إذا وجدت مصفوفة نظامية P بحيث يكون $D = P^{-1}.A.P$ مصفوفة قطرية.

المبرهنة التالية تبين لنا الشرط اللازم والكافي لكي تكون المصفوفة المربعة A قابلة للتقطير وتقدم لنا طريقة لإيجاد مصفوفة لها معكوس P بحيث تكون $P^{-1}.A.P$ قطرية.

مبرهنة (5–1):

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. عندئذ تكون A قابلة للتقطير إذا وفقط إذا كان لها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

البرهان:

$\Rightarrow$) لنفرض أولاً أن A قابلة للتقطير . إذن توجد مصفوفة لها معكوس P حيث $D = P^{-1}.A.P$ مصفوفة قطرية ولنفرض أن:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ & \vdots & & \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{وأن} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين D , A متشابهتان فإن لهما نفس القيم الذاتية، وبما أن القيمة الذاتية للمصفوفة القطرية هي عناصر القطر الرئيسي فإننا نستنتج أن: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A . وإذا فرضنا أن $X_1, ..., X_n$ هي أعمدة P فإن:

$$P.D = [\lambda_1 X_1 | \lambda_2 X_2 | .... | \lambda_n X_n]$$

$$AP = [AX_1 | AX_2 | ...... | AX_n |]$$

وبمـــا أن: $AP = PD$ فـــإن: $AX_1 = \lambda_1 X_1,...., AX_n = \lambda_n X_n$ وبمـــا أن P لهـا معكـوس فـإن جميـع أعمـدتها غيـر صـفرية ومسـتقلة خطيـاً. ولـذا فـإن $X_1, X_2,..., X_n$ متجهات ذاتية مستقلة خطياً للمصفوفة A.

$\Leftarrow$) نفـرض أن $X_1, X_2,..., X_n$ متجهـات ذاتيـة للمصـفوفة A مسـتقلة خطيـاً . ولنفـــرض أن $\lambda_1, \lambda_2,......, \lambda_n$ هـــي القـــيم الذاتيـــة المقابلـــة. عندئـــذ $AX_1 = \lambda_1 X_1,...., AX_n = \lambda_n X_n$. لنفـــــــــــــــــرض أن: $P = [X_1 \mid X_2 \mid .... \mid x_n]$ عندئذٍ:

$$A.P = [AX_1 \mid AX_2 \mid ...... \mid AX_n] = [\lambda_1 X_1 \mid \lambda_2 X_2 \mid .... \mid \lambda_n X_n] = P.D$$

حيث:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بمـا أن $X_1, X_2,..., X_n$ مسـتقلة خطيـاً فإنـه يوجـد معكـوس للمصـفوفة P. إن $D = P^{-1}.A.P$ وبالتالي فإن A قابلة للتقطير .

مثال (5–1):

أثبـت أن المصـفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ قابلـة للتقطيـر ، ثـم أوجـد مصـفوفة P بحيث تكون $P^{-1}.AP$ قطرية.

الحل:

وجـــدنا فـــي المثـــال (2–4) أن القيمـــة الذاتيـــة للمصـــفوفة A هـــي $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ وأن

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, X_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهي أساسات الفضاءات الذاتية E_1, E_2, E_3 على الترتيب ... إذن:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$D = P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال (5−2):

أثبت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ قابلة للتقطير وأوجد مصفوفة P بحيث أن $D = P^{-1}.A.P$ مصفوفة قطرية.

الحل:

لقد وجدنا في المثال (3−3) أن القيمة الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 7$ كما أن: $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ أساس الفضاء الذاتي E_1 وأن $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ أساس للفضاء الذاتي E_7. ولذا فإن $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ وبالتالي فإن: $D = P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

مثال (5−3):

هل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ قابلة للتقطير.

الحل:

نوجد القيمة الذاتية للمصفوفة A وذلك بإيجاد جذور كثيرة الحدود المميزة

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12$$

$$=(\lambda-2)^2\ (\lambda-3)$$

ومنه فإن القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1=\lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$ وبحساب أساسات للفضاءات الذاتية نجد أن: $X_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ أساس لـ E_2 و $X_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ أساس لـ E_3 . ولذا فإنه لا يمكن إيجاد ثلاثة متجهات ذاتية مستقلة خطياً وبالتالي فإن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

إن الشرط الكافي حتى تكون المصفوفة A قابلة للتقطير هو في المبرهنة التالية:

مبرهنة (5−2):

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n عدد قيمها الذاتية المختلفة هو n فإن A قابلة للتقطير.

البرهان:

لنفرض أن: $X_1,X_2,...,X_n$ هي المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ وحسب المبرهنة (3−1) نجد أن $X_1,X_2,...,X_n$ مستقلة خطياً وحسب المبرهنة (5−1) نجد أن A قابلة للتقطير.

مثال (5−4):

أثبت أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & -5\end{bmatrix}$ قابلة للتقطير ، ثم أوجد P بحيث إن: $D=P^{-1}.A.P$ مصفوفة قطرية.

الحل:

نوجد القيمة الذاتية للمصفوفة A ، أي :

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda+2)\,(\lambda-1)$$

وبالتالي فالقيمة الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1=-5,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$ وبما أن القيمة الذاتية للمصفوفة A مختلفة مثنى مثنى فإن A مصفوفة قابلة للتقطير، نوجد المتجهات الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية لـ A فنجد أن $X_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ X_3\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$ هي أساسات الفضاءات الذاتية E_{-5},E_{-2},E_1 على التوالي.

ومنه فإن : $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ وأن

$$D=P^{-1}.A.P=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

ملاحظة (5−2):

إن عكس المبرهنة السابقة (5−2) غير صحيح فمثلاً القيم الذاتية للمصفوفة في المثال (5−3) ليست مختلفة ولكن المصفوفة قابلة للتقطير ، لذلك فإن المبرهنة السابقةلا تقدم لنا حلاً لمسألة التقطير لذلك يلزمنا التعريف التالي.

تعريف (5−2):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي V على الحقل F، ولتكن λ قيمة ذاتية لـ f. نسمي تكرار λ كجذر لكثيرة الحدود المميزة لـ f تعدداً جبرياً، ونسمي بعد الفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية λ تعدداً هندسياً.

مبرهنة (5−3):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي V على الحقل F. عندئذ التكرار الهندسي لـ λ أصغر أو يساوي التكرار الجبري لها.

البرهان:

نفرض أن التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ للمؤثر الخطي f يكون k. هذا يعني أنه يوجد لـ λ عدد k من المتجهات الذاتية الموافقة المستقلة خطياً ولتكن $v_1, \dots, v_k$.
نوسع هذه المجموعة لتصبح أساساً للفضاء V. إذاً المجموعة
$\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\}$: تشكل أساساً لـ V. عندئذ يكون لدينا:

$$f(v_1) = \lambda v_1$$
$$f(v_2) = \lambda v_2$$
$$\dots \dots$$
$$f(v_k) = \lambda v_k$$
$$f(u_1) = a_{11}v_1 + \cdots + a_{1k}v_k + b_{11}u_1 + \cdots b_{1m}u_m$$
$$\dots \dots \dots$$
$$f(u_m) = a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mk}v_k + b_{m1}u_1 + \cdots b_{mm}u_m$$

وبالتالي فإن مصفوفة المؤثر f في أساس الفضاء V هي:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{21} & \cdots & am1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & a_{12} & a_{22} & \cdots & am2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{1k} & a_{2k} & \cdots & amk \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{11} & b_{21} & \cdots & bm1 \\ \vdots & & & \vdots & b_{12} & b_{22} & \cdots & bm2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{1m} & b_{2m} & \cdots & bmm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda 1 & A \\ 0 & B \end{bmatrix};$$

$$A=\left[a_{ij}\right]^{\ell}, B=\left[b_{ij}\right]^{t}$$

إن T مصفوفة خلايا مثلثية، وبالتالي فإن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة λI هي $(x-\lambda)^k$ التي تقسم كثيرة الحدود للمصفوفة T. إذاً التكرار الجبري للقيمة الذاتية λ للمؤثر f على الأقل k، وبالتالي فإن التكرار الهندسي أصغر أو يساوي التكرار الجبري. وهو المطلوب.

مبرهنة (5−4)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n ولتكن :

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m1}(\lambda-\lambda_2)^{m2}\ ....(\lambda-\lambda_k)^{mk}$$

كثيرة الحدود المميزة حيث $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ هي القيم الذاتية المختلفة للمصفوفة A وليكن $d_i=\dim(E_{\lambda})$ هو التعدد الهندسي للقيمة الذاتية λ_i عندئذٍ فإن العبارات الاتية جميعها متكافئة:

1− A قابلة للتقطير.

2− $d_1+d_2+.....+d_k=n$

3− $d_i=m_i$ لكل $i=1,2,3,....,k$.

البرهان:

1) ⇐ 2) بما أن A قابلة للتقطير فحسب المبرهنة (5 − 1) يوجد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً للمصفوفة A كل منها يقابل قيمة ذاتية واحدة λ_i.

ولنفرض أن عدد المتجهات الذاتية التي تنتمي إلى E_{λ_i} هو t_i عندئذٍ :

$t_i\le\dim(E_{\lambda_i})=d_i$ لكل $i=1,....,k$ ولذا فإن:

$n=t_1+t_2+.....+t_k\le d_1+d_2+.....+d_k$ ولكن باستخدام المبرهنة (5−1) نجد أن مجموعة جميع المتجهات الذاتية للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_k$ مستقلة خطياً. إذاً: $d_1+d_2+.....+d_k\le n$ وبالتالي فإن $d_1+d_2+.....+d_k=n$.

2) ⇐ 3) باستخدام المبرهنة (5−3) نجد أن $d_i\le m_i$ لكل $1=1,2,...,k$ وحسب الفرض نجد أن:

$$n = d_1 + ... + d_k \le m_1 + m_2 + ... + m_k = \deg(\Delta(\lambda)) = n$$

ومنه فإن $d_1 + d_2 + ... + d_n = m_1 + m_2 + ... + m_k$ وبما أن $d_i \le m_i$ فإننا نجد أن $d_i = m_i$ لكل $i = 1,2,....,k$.

3) $\Leftarrow$ 1) لنفرض أن B_i أساس للفضاء الذاتي E_{λ_i} لكل $i = 1,2,....,k$ ولنفرض أن B هي مجموعة المتجهات التي ينتمي كل من عناصرها على واحدة من المجموعات B_i على الأقل. عندئذٍ B مستقلة خطياً وتحتوي على $d_1 + d_2 + ... + d_k$ من المتجهات وبما أن $d_i = m_i$ فإن:

$d_1 + d_2 + ... + d_n = m_1 + m_2 + ... + m_k = n$ وهذا يعني أن A قابلة للتقطير وهو المطلوب.

ومن خلال ما سبق نستطيع تقديم خوارزمية تبيّن ما إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير أم لا:

1- نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A .

2- إذا كانت $m_i \ne n - rank\,(\lambda_i I - A)$ فإن المصفوفة غير قابلة للتقطير وهنا نتوقف.

3- إذا كانت $m_i = n - rank\,(\lambda_i I - A)$ لكل i فإن المصفوفة قابلة للتقطير.

4- نعين أساسات الفضاءات الذاتية $B = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

5- نضع $P = [X_1 \mid X_2 \mid .... \mid X_n]$ وعندئذٍ تكون $P^{-1}.A.P$ هي المصفوفة القطرية.

مثال (5-5):

ابحث في قابلية تقطير المصفوفة A وإذا كانت A قابلة للتقطير فعين المصفوفة P التي تجعل $P^{-1}.A.P$ قطرية حيث:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

بما أن المصفوفة A مثلثية فإن القيم الذاتية هي عناصرالقطر الرئيسي وهي:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 \ , \ \lambda_3 = \lambda_4 = 3$$

الآن وبما أن:

$$n - rank(-2I - A) = 4 - 2 = 2 = m_1$$

$$n - rank(3I - A) = 4 - 2 = 2 = m_2$$

حيث m_i هو تكرار λ_i فإن A قابلة للتقطير ولإيجاد أساس الفضاء الذاتي E_{-2} نقوم بحل للنظام $(-2I - A)X = 0$ وهذا النظام يأخذ الصيغة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوص نجد أن هذا النظام يكافئ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_4 = 0$$

ومنه نجد $x_3 = x_4 = 0$ وبوضع $x_1 = t, x_2 = s$ نجد أن:

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ أساس الفضاء الذاتي E_{-2} .

وبــــنفس الطريقـــة نجـــد أن: $x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ أســـاس للفضـــاء E_3

ولذا فإن A قابلة للتقطير وأن:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (5–6):

ابحث قابلية المصفوفة A للتقطير حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

القـــيم الذاتيـــة للمصـــفوفة A هـــي $\lambda_3 = \lambda_4 = 3$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ وبمـــا أن:
$n - rank(2I - A) = 4 - 3 = 1 \neq 2$ وعليه فإن A غير قابلة للتقطير.

(3–6) استخدام التقطير في حساب قوى مصفوفة:

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n وقابلة للتقطير . عندئذ من العلاقة:

$$D = P^{-1}.A.P$$

نجد أن:

$$D^n = (P^{-1}AP)^n = \underbrace{(P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP).....(P^{-1}AP)}_{n \text{ مرة}}$$

$$= P^{-1}A^nP \Rightarrow A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

مثال (6−1) :

احسب A^n ثم استنتج A^4 حيث تكون:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

الحل: كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$D(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-5\end{vmatrix}=-5\left[(\lambda-)^2-4\right]$$

$$=(\lambda-5)(\lambda^2-6\lambda+5)=(x-1)(\lambda-5)^2$$

ومنه $\Delta(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)^2$ والمتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية هذه هي:

$$\lambda_1=1\,,v_1=\begin{bmatrix}+1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \lambda_2=5,v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ومنه A قابلة للتقطير ويكون:

$$P^{-1}.A.P=1/2\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

نوجد A^n : لدينا $P^{-1}.A.P=D$ ومنه:

$$D^n=P^{-1}.A^n.P\Rightarrow A^n=P.D^n.P^{-1}$$

وبما أن: $D^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{bmatrix}$ عندئذٍ يكون:

$$A^n=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1+5^n}{2}&\frac{-1+5^n}{2}&0\\\frac{-1+5^n}{2}&\frac{1+5^n}{2}&0\\0&0&5^n\end{bmatrix}$$

ومنه فإن:

$$A^4=\begin{bmatrix}313&312&0\\312&313&0\\0&0&625\end{bmatrix}$$

(3−7) مؤثر الإسقاط The Projection 0f Operator

تعريف (7−1):

إذا كان P مؤثراً خطياً على الفضاء V وكان W_1,W_2 فضاءين جزئيين من V ، عندها نقول إن P إسقاطاً لـ V على W_1 موازياً لـ W_2 إذا كان.

أ− $\ker P=W_2$

ب− $V=W_1\oplus W_2$

ج− $P(v)=v,\forall v\in W_1$ أي أن $\operatorname{Im}P=W_1$.

مبرهنة (7−1):

ليكن π مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي V المنتهي البعد على الحقل F. عندئذ يكون π إسقاطاً إذا وفقط إذا كان $\pi^2=\pi$.

البرهان:

ليكن π مؤثر إسقاط للفضاء V على الفضاء الجزئي V_1 ولنبرهن أن $\pi^2=\pi$.

من تعريف الإسقاط نجد أن $v\in V$, $v=v_1+v_2$، حيث إن :

$v_1 \in V_1 = Im\,\pi$ و $v_2 \in V_2 = ker\,\pi$. نقوم بتأثير π على v فنجد أن:

$$\pi(v) = \pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1) + \pi(v_2) = \pi(v_1) + 0 = \pi(v_1) = v_1$$

وذلك لأن $v_1 \in Im\,\pi$ و $v_2 \in ker\,\pi$.نطبق من جديد المؤثر π فنجد أن $\pi(\pi(v)) = \pi(v_1)$،أي أن $\pi^2(v) = \pi(v_1)$، وبما إن $\pi(v) = \pi(v_1)$. فإنه يكون:

$$\pi^2(v) = \pi(v) \;\; ; \; \forall v \in V,$$

وبالتالي $\pi^2 = \pi$.

العكس: نفرض أن $\pi^2 = \pi$ ولنثبت أن π إسقاط للفضاء V. نعرف الفضاءين الجزئيين من الفضاء V بالشكل الآتي:

$$V_1 = \{v_1 = \pi(v)\,, v \in V\} = Im\,\pi$$
$$V_2 = \{v_2 \in V \;;\; \pi(v_2) = 0\} = ker\,\pi$$

وبالتالي يكفي برهان صحة العلاقة الآتية:

$$V = V_1 \oplus V_2$$

ليكن $v = \pi(v) + (I - \pi)(v)$ لكل $v \in V$.بما أن $\pi(v) = v_1 \in V_1$ وكذلك $(I - \pi)(v) \in ker\,\pi$ لأن:

$$\pi(I - \pi)(v) = (\pi - \pi^2)(v) = 0,$$

وبالتالي $V = V_1 + V_2$. نثبت أخيراً أن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.ليكن $v_1 = \pi(v) \in V_1 \cap V_2$. عندئذ نجد أن:

$$v_1 = \pi(v) \in V_1 \;\; ; \;\; v_1 = \pi(v) \in V_2 = ker\,\pi$$

نطبق المؤثر π على العلاقة $v_1 = \pi(v)$ فنجد أن:

$$\pi(v_1) = \pi(\pi(v)) = \pi^2(v) = \pi(v) = v_1 = 0$$

أي إن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ إذاً $V = V_1 \oplus V_2$.

مثال (7−1):

المؤثر الخطي $f : R^3 \to R^3$ والمعرف بالشكل:

$$f(x, y, z) = (0, -2x + y, 4x + z)$$

هو إسقاط لـ R^3 لأن:

$$f^2(x,y,z)=f\big(f(x,y,z)\big)$$
$$=f(0,-2x+y,4x+z)$$
$$=\big(0,-2.(0)+(-2x+y),4.0+(4x+z)\big)$$
$$=(0,-2x+y,4x+z)=f(x,y,z)$$

بالتالي $f^2=f$ وهذا يعني أن f هو إسقاطٌ .

مثال (7−2) :

برهن أن المؤثر الخطي على R^s المعين:

$$f(x,y,z)=(x-2y,0,z+4y)$$

هو إسقاط واحسب $\ker f\ ;\ \operatorname{Im} f$

الحل:

لدينا :

$$f^2(x,y,z)=f\ \big(f(x,y,z)\big)$$
$$=f(x-2y,0,z+4y)$$
$$=\big((x-2y)-2.0,0,(z+4y)+4.0\big)$$
$$=(x-2y,0,z+4y)=f(x,y,z)$$
$$\Rightarrow f^2=f$$

لنوجد $\ker f$:

$$\forall(x,y,z)\in\ker f\Rightarrow f(x,y,z)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow x-2y=0\ ,z+4y=0$$

ومنه بالحل نجد:

$$\ker f=\{x(-2,-1,4):x\in R\}$$

أما $\operatorname{Im} f$ محددة بالمتجهات:

$$f(1,0,0)=(1,0,0)\ ,\ f(0,1,0)=(-2,0,4),\ f(0,0,1)=(0,0,1)$$

وأساس $\operatorname{Im} f$ هو $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ والإسقاط في هذه الحالة غير عمودي لأن المستقيم الذي متجه توجيهه $(-2,-1,4)$ غير عمودي على المستوي XOZ والذي يمثل $\operatorname{Im} f$.

مبرهنة (7−2):

إذا كان V فضاء متجهي على الحقل F و $W_1,.....,W_k$ فضاءات جزئية من V بحيث أن:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ..... \oplus W_k$$

فإنه يوجد k مؤثراً خطياً على V ، وليكن $P_1, P_2,....,P_k$ ويتحقق من أجلها ما يلي:

1− P_i اسقاط للفضاء V ، حيث $i = 1,2,....,k$.

2− $O = P_i P_j$ عندما $i \neq j$ (هو التطبيق الصفري).

3- $I = P_1 + P_2 + ... + P_k$ (I التطبيق المطابق).

4− $P_i(V) = W_i$ حيث $i = 1,2,....,k$.

5− $\ker P_i = W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_k$

البرهان:

بما أن : $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ..... \oplus W_k$ فإن كل متجه $v \in V$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$v = w_1 + w_2 + ... + w_k \quad ; w_i \in W \, ; i = 1, 2, ..., n$$

يمكن تعريف إسقاط P_i للفضاء V على W_i بالشكل:

$$P_i : V \to V$$

$$P_i(v) = w_i \ , \forall v \in V$$

واضح بأن:

$$P_i(V) = W_i$$

$$\ker \ P_i = W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_k$$

وأنه يمكن التعبير عن المتجه v بدلالة الإسقاط P_i على الشكل التالي:

$$v = P_i(v) + P_2(v) + ... + P_k(v)$$

أي أن: $I(v) = (p_1 + p_2 + ... + p_k)(v)$

ما يعني بالتالي أن: $I = P_1 + P_2 + ... + P_k$

حيث إن I هو التطبيق المطابق . وهو المطلوب.

مثال (7–3):

برهن أن المؤثر الخطي والذي مصفوفته:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إسقاط للفضاء R^3 ، ثم أوجد $\operatorname{Im} p = p(R^3)$ و $\ker P$ وفسر هذا الإسقاط هندسياً.

الحل:

نعلم أنه حتى يكون p اسقاطاً يجب أن يحقق $p^2 = p$ لذلك سوف نحسب مصفوفة p^2 و هي A^2 .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن فإن $A^2 = A$ ما يعني أن $P^2 = P$ وبالتالي فإن P يكون اسقاطاً للفضاء V.

2) إن $P(R^3) = \{p(v) \; ; v \in R^3\}$

كما أن :

$$p(v) = p(x, y, z)$$

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-3y + 5z, y, z)$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} p &= \{(-3y+5z, y, z) : y, z \in R\} \\ &= \{(-3,1,0)\,y, (5,0,1)\,z : y, z \in R\} \\ &= span\,\{(-3,1,0),(5,0,1)\}\end{aligned}$$

إذن الصــورة المباشــرة لــ p هــي فضــاء جزئــي فــي R^3 بُعـده 2 . وأساســه $\{(-3,1,0),(5,0,1)\}$.

3- إن :

$$\ker P = \{v \in R^3 : p(v)=0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in R^3 : (-3y+5z, y, z) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x,0,0) : x \in R\}$$

4- إن p إسقاط للفضاء المتجهي R^3 على المستوي المعين بالمتجهين: $v_1 = (-3,1,0),\quad v_2 = (+5,0,1)$ أي المستوي الذي معادلته: $x+3y-5z=0$ والموازي للمحور OX .

(3-8): تثليث مؤثر خطي (أو مصفوفة مربعة):

Reduction to Triangular form

درسـنا فـي البنـد السـابق تقطيـر مـؤثر خطـي f علـى فضـاء متجهـي V منتهـي البعـد ووجـدنا أن عمليـة التقطيـر ليسـت ممكنـة دومـاً. فقـد وجـدنا حسـب المبرهنـة (5-4) أن الشـرط الـلازم والكـافي لـذلك هـو أن تكـون كثيـرة الحـدود المميـزة لـ f معرّفـة علـى الحقـل F وأن يكـون $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ $(i=1,2,....,n)$ أي التعـدد الجبـري يجـب أن يسـاوي التعـدد الهندسـي لكـل قيمـة ذاتيّـة. وسـوف نبـين فـي هـذا البنـد متـى يكـون لمـؤثر خطـي مصـفوفة مثلثيـة عليـا أو سـفلى، أو متـى تكـون مصـفوفة مـؤثر خطـي مشابهة لمصفوفة مثلثية عليا أو سفلى.

تعريف (8-1):

نقـول عـن المصـفوفة $A = [a_{ij}] \in M_{(n,n)}(\mathbb{C})$ إنهـا مثلثيـة عليـا إذا كانـت جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفاراً ، أي:

$$a_{ij} = 0 \quad , \forall i > j$$

وبطريقة مشابهة نعرف المصفوفة المثلثية السفلى .

مثال(8−1):

المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&0&1&2\\0&-1&2&1\\0&0&-1&5\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ هي مصفوفة مثلثية عليا أما المصفوفة

$B=\begin{bmatrix}-i&0&0\\3-i&5&0\\3i&-i&2\end{bmatrix}$ فهي مثلثية سفلى.

تعريف (8−2):

نقول إن المؤثر الخطي f على الفضاء المتجهي V على الحقل K منتهي البُعد إنه قابل للتثليث (أوخزول للشكل المثلثي أو تلوث) إذا أمكن إيجاد أساس لـ V بحيث تكون مصفوفة هذا المؤثر f بالنسبة لهذا الأساس مصفوفة مثلثية.

مثال (8−2):

ليكن $f:R^3\to R^3$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل :

$$f(x,y,z)=(x-2y,3y-z,3z)$$

إن مصفوفة هذا المؤثر الخطي بالنسبة للأساس النظامي في الفضاء R^3 هي : $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&3&-1\\0&0&3\end{bmatrix}$ وهي مصفوفة مثلثية عليا .

وبالتالي فالمؤثر الخطي قابل للتثليث . ولنبين الآن ما إذا كان المؤثر الخطي قابلاً للتقطير أم لا.

إن كثير الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمؤثر f هو:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda-1&2&0\\0&\lambda-3&1\\0&0&\lambda-3\end{bmatrix}==(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

لإيجاد كثيرة الحدود الصغرى $m(\lambda)$ للمؤثر الخطي f نحسب:

$(I-A)(3I-A)$ فنجد:

$$(I-A)(3I-A)=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

وبالتالي نستنتج أن كثيرة الحدود الأصغرية هي: $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$ وهذا يعني أن المؤثر الخطي غير قابل للتقطير.

ملاحظة (8−1):

إن المثال السابق يبين لنا أن أي مؤثر خطي قابل للتقطير هو مؤثر خطي ثلوث. في حين أن العكس غير صحيح أي أنه ليس بالضرورة أن يكون كل مؤثر خطي قابل للتثليث مؤثراً خطياً قابلاً للتقطير.

تعريف (8−3):

نقول عن المصفوفة المربعة A من المرتبة n على حقل K إنها قابلة للتثليث على F، إذا وجدت مصفوفة نظامية p بحيث إن: $B=P^{-1}.A.P$ تكون مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى ونقول هنا أن P تثليث للمصفوفة A .

مبرهنة (8−1):

إذا كان f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي V ذي البعد n ، والمعرف فوق الحقل K . وكان $\Delta(\lambda)$ هو كثير الحدود المميز لـ f . فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون f قابلاً للتثليث (قابلاً للاختزال إلى الشكل المثلثي) هو أن يكون كثير الحدود المميز قابلاً للتفريق على الحقل K على الشكل:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{P_1}.......(\lambda-\lambda_{p_r})^{p_r}\ ,$$

$$P_1 \geq 1,\ P_1 + P_2 + ... + P_r = n$$

البرهان:

لـــزوم الشـــرط : لنفـــرض أن f قـــابلاً للتثليـــث فهـــذا يعنـــي وجـــود أســـاس $\{v_1,....,v_n\}$ للفضـــاء المتجهـــيV بحيـــث تكـــون مصـــفوفة f بالنســـبة لهـــذا الأساس مثلثية ، ولتكن من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

عندئذٍ كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ لهذا المؤثر تكون:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})......(\lambda - a_{nn})$$

وهذا يعني أن $\Delta(\lambda)$ قابلة للتفريق على K وحيث إن:

$P_i = 1\ ;\ i = 1,2....n$ وأن: $p_1 + p_2 + ... + p_n = n$

<u>كفاية الشرط:</u>

لنفـرض الآن كثيـرة الحـدود المميـزة $\Delta(\lambda)$ للمـؤثر الخطـي f قابلـة للتفريـق على K من الشكل:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} . (\lambda - \lambda_2)^{p_2} ..... (\lambda - \lambda_r)^{pr} ,$$
$$p_i \geq 1,\ p_1 + p_2 + ... + p_r = n$$

نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي.

1- المبرهنـة صـحيحة مـن أجـل $n = 1$ ، أي أنهـا صـحيحة مـن أجـل فضـاء متجهي بُعده 1 .

2- لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل $n=k$ ، أي أنها صحيحة من أجل فضاء متجهي بُعده k .

3- نبرهن صحتها من أجل أي فضاء متجهي بُعده k .

بما أن كثيرة الحدود المميزة للمؤثر f هي من الشكل:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{P_1}(\lambda-\lambda_2)^{P_2}.....(\lambda-\lambda_r)^{P_r}$$

فإن ذلك يعني وجود قيمة ذاتية واحدة على الأقل ، ولتكن λ_1 يقابلها متجه ذاتي v_1 . وبالتالي فإن:

$$f(v_1)=\lambda_1 v_1 \ ; \ v_1 \neq 0$$

لنفرض أن W_1 هو الفضاء الجزئي من V ، والمولد بالمتجه v_1 ، وأن W_2 هو الفضاء الجزئي المكمل لـ W_1 في V ، عندئذ يكون: $V=W_1 \oplus W_2$ بالإمكان إتمام المتجه v_1 إلى أساس $\{v_1,u_1,u_4,.....,u_{k-1}\}$ للفضاء V وحيث إن المجموعة $\{u_1,u_4,.....,u_{k-1}\}$ هي أساس للفضاء الجزئي W_2 المكمل لـ W_1 في V. عندها إن مصفوفة f هي في الشكل:

$$A=\left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & B & & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

حيث إن B هي مصفوفة مربعة من المرتبة $k-1$.

بما أن V مجموع مباشر للفضاءين الجزئين W_2 و W_1 ، فإن كل متجه v من V يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$v=w_1+w_2 \ ;w_1 \in W_1,w_2 \in W_2$$

$$w_1 \in W_1 \Rightarrow w_1=c_1 v_1$$

وبالتالي يكون:

$$f(w_1)=c_1 f(v_1)=c_1\lambda_1 v_1 \in W_1$$

و إذا فرضنا أن P_1 إسقاط للفضاء V على W_1 موازٍ لـ W_2 وأن P_2 اسقاطاً لـ V على W_2 موازٍ لـ W_1 ، فإنه يكون:

$$P_1(V) = W_1 = \ker P_2$$

$$P_2(V) = W_2 = \ker P_1$$

وأن التطبيق المطابق I يكون: $I = P_1 + P_2$

وبالتالي:

$$If = (P_1 + P_2) f = P_1 f + p_2 f$$

عندئذ يكون:

$$If(v) = P_1 f(v) + P_2 f(v)$$

أي أن:

$$f(v) = P_1 f(v) + P_2 f(v)$$

وبما أن $f(v) \in V$ ، فإنه يكون عندئذٍ:

$$f(v) = w_1` + w`_2 ; w`_1 \in W_1 , w`_2 \in W$$

إذن:

$$f(v) = P_1(w_1` + w`_2) + P_2 f(v)$$

$$= P_1(w_1`) + P_2(w`_2) + P_2 f(v)$$

$$= c_2 v_1 + 0 + P_2 f(v)$$

وذلك لأن $P_1(w`_1) \in P_1(v) = W_1$ و $w`_2 \in \ker P_1$

وبالتالي يكون:

$$f(v) = p_2 f(v) + c_2 v_1$$

إن $p_2 f$ مؤثر خطي على V ، فلو رمزنا بـ g لمقصور $p_2 f$ على W_2 ، لكان g مؤثراً خطياً على W_2 ، $(g : W_2 \to W_2)$ ، مصفوفة B بالنسبة للأساس $\{u_1, u_2, ..., u_{k-1}\}$. وبما أن بعد W_2 هو $k-1$ ، فإن مصفوفته B تكون مصفوفة مثلثية بحسب الفرض ، أي من الشكل:

$$B=\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ 0 & b_{33} & \cdots & b_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}$$

إذن فالمصفوفة A هي من الشكل:

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix}$$

وهـذا يعنـي أن المبرهنـة صـحيحة مـن أجـل أي فضـاء متجهـي بُعـده k وبالتـالي فالمبرهنـة صـحيحة مهمـا كـان بعـد الفضـاء المتجهـيV. أي أن المبرهنة صحيحة مهما تكن n .

ملاحظة (8−2):

إن كـل مصـفوفة مربعـة مـن المرتبـة n فـوق الحقـل K تحـدد مـؤثراً خطيـاً $f:V\to V$ للفضـاء المتجهـي الـذي بُعـده n علـى K. ومصـفوفته A . وبالتـالي فـإن الشـرط الـلازم والكـافي لكـي تكـون المصـفوفة A قابلـة للتثليـث هـو أن يكون المؤثر الخطي f قابلاً للتثليث.

والمبرهنة التالية مقابلة للمبرهنة السابقة (8−1).

مبرهنة (8−2):

كـل مصـفوفة مربعـة A مـن المرتبـة n فـوق الحقـل K قابلـة للتثليـث إذ وفقـط إذا كانت كثيرة حدودها المميزة $\Delta(\lambda)$ قابلة للتفريق على الحقل K على الشكل:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{p_1}.(\lambda-\lambda_2)^{p_2}....(\lambda-\lambda_r)^{p_r}\ ,$$
$$P_1\geq 1;\ p_1+p_2+....+p_r=n$$

نتيجة (8−1):

كـل مصـفوفة مربعـة فـوق الحقـل K تكـون قابلـة للتثليـث عنـدما يكـون الحقـل K مغلقاً جبرياً.

ملاحظة (8−3):

من أجل إيجاد المصفوفة المثلثية $A`$ المشابهة للمصفوفة A . نبحث في تثليث المؤثر الخطي : $f:K^n \to K^n$

والذي يتحدد بمصفوفته A بالنسبة لأساس نظامي E للفضاء K^n .

عندما نجد الأساس B ، الذي يجعل مصفوفة المؤثر الخطي f قابلة للتثليث، فإننا نبحث عن مصفوفة الانتقال P من الأساس B إلى الأساس E والذي من أجله تكون:

$$A` = P^{-1}AP$$

مثال (8−3) :

ليكن $f:R^3 \to R^3$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z) = (-z, x+z, y+z)$$

والمطلوب اختزال هذا المؤثر إلى الشكل المثلثي.

الحل:

إن مصفوفة هذا المؤثر بالنسبة للأساس النظامي هي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة لـ f هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda.(\lambda^2 - \lambda - 1) + 1$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

والحدودية المميزة مفرقة على R والمؤثر الخطي f قابل للتثليث. والمتجه الذاتي المقابل للقيمة $\lambda = -1$ هو $(1,-2,+1)$ نأخذ: $v_1 = (1,-2,+1)$. $E_1 = \{\alpha(1,-2,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

نوجد أساساً للفضاء R^3 أحد متجهاته v_1 وليكن:

$$\{v_1=(1,-2,1), a_1=(0,1,0), a_2=(0,0,1)\}$$

والفضاء الجزئي المكمل لـ E_1 هو الفضاء الجزئي المولّد بالمتجهين:

$\{(0,1,0),(0,0,1)\}$. نوجد مصفوفة هذا المؤثر بالنسبة لهذا الأساس:

$$f(v_1)=f(1,-2,1)=(-1,2,-1)=-1.v_1+0a_1+0a_2$$
$$f(a_1)=f(0,1,0)=(0,0,1)=0v_1+0a_1+1a_2$$
$$=0(-1,2,-1)+0(0,1,0)+1(0,0,1)$$
$$f(a_2)=f(0,0,1)=(-1,1,1)=1v_1-1a_1+2a_2$$

ومصفوفة هذا المؤثر f بالنسبة لهذا الأساس هي:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

وهي غير مثلثية نتابع.

وبمـــــا أن: $V=E_1\oplus W$ حيـــــث أن $E_1=\{\alpha(1,-2,1):\alpha\in R\}$ وبـــــذلك يكون لدينا :

$$v=(x,y,z)=(x,-2x,x)+(0,2x+y,-x+z)$$

وبالتالي انّ مؤثر الاسقاط P على V معين بـ:

فيكون: $P(x,y,z)=(0,2x+y,-x+z)$

$$g(x,y,z)=(p\circ f)(x,y,z)$$
$$=P(-z,x+z,y+z)=(0,x-z,y+2z)$$

نحسب مصفوفة g بالنسبة للأساس: $\{a_2=(0,1,0), a_3=(0,0,1)\}$

$$g(0,1,0)=(0,0,1)=0a_2+1a_3$$
$$g(0,0,1)=(0,-1,2)=-1a_2+2a_3$$

ومصفوفة g بالنسبة للأساس $\{a_2,a_3\}$ هي: $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

والحدودية المميزة لـ g هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda & +1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)+1=\lambda^2-2\lambda+1$$
$$=(\lambda-1)^2$$

القيمة الذاتية للمؤثر الخطي هي: $\lambda=1$

والمتجه الذاتي المقابل للقيمة $\lambda=1$ هو: $v_2=(0,-1,1)$

تتمة لأساس لـ W: $\{v_2=(0,-1,1), a_3=(0,0,1)\}$

ومصفوفة g بالنسبة لهذا الأساس هي:

$$\left.\begin{array}{l} g(0,-1,1)=(0,-1,1)=1v_2+0a_3\\ g(0,0,1)=(0,-1,2)=+1.v_2+1.a_3\end{array}\right\}\Rightarrow M(g)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة مثلثية عليا ومصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس في R^3 :

$$\{v_1=(1,-2,1), v_2=(0,-1,1), v_3=(0,0,1)\}$$

هي:

$$T=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ملاحظة (8-3):

إن المصفوفتين:

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

متشابهتان ومصفوفة الانتقال من الأساس الأخير إلى الأساس النظامي هي:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

ويكون $T=P^{-1}.AP$ (تحقق من ذلك).

في الأمثلة التالية نقدم الطريقة العملية للتثليث.

مثال (8−4):

عين المصفوفة المثلثية العليا T المشابهة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&-2\\-1&0&-2\end{bmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-2&\lambda-1&2\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

والمصفوفة ثلوثة (قابلة للتثليث) . كما إن متجهاتها الذاتية هي:

$$\lambda_1=-1\Rightarrow v_1=(-1,2,1),\ \lambda_2=3\Rightarrow v_2=(-5,-6,1)$$

نتمم بالمتجه $e_3=(0,0,1)$ للحصول على أساس لـ R^3 ، فنجد أن مصفوفة المؤثر الخطي f على R^3 :

$$f(x,y,z)=(2x+y+z,2x+y-2z,-x-2z)$$

وبالنسبة للأساس $\{v_1,v_2,e_3\}$ هي:

$$T=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

ويكون: $T=p^{-1}.A.p$ حيث :

حيث إن: $$P=\begin{bmatrix}-1&-5&0\\2&-6&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

ملاحظة (8−4):

مـن المثـال السـابق نجـد أن اختيـاراً آخـر للمتجـه الثالـث للأسـاس يعطـي أساسـاً جديـداً للفضـاء R^3 ويـؤدي بالتـالي إلـى مصـفوفة مثلثيـة T_1 مختلفـة عـن السابقه، على سبيل المثال إذا أخذنا الأساس $\{v_1, v_2, e_1 = (1,0,0)\}$

نحصل على المصفوفة المثلثية:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

تمارين محلولة

1- ليكن $f:R^2 \to R^2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y)=(2x-4y,5x-2y)$$ والمطلوب:

أوجد جميع الفضاءات المتجهية الجزئية من R^2 اللامتغيرة بالنسبة لـ f .

الحل:

لنوجد مصفوفة f بالنسبة لأساس نظامي.

$$f(e_1)=f(1,0)=(2,5)=2(1,0)+5(0,1)$$

$$f(e_2)=f(0,1)=(-4,-2)=-4(\ \ )-2(0,1)$$

ومن مصفوفة f هي:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

وإن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -5 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\lambda^2+16=0$$

إن هذه المعادلة مستحيلة الحل في R . وبالتالي لا توجد فضاءات جزئية من R^2 أحادية البعد لا متغيرة بالنسبة لـ f .

إذاً $\{0\}$ و R^2 هي كل الفضاءات المتجهية الجزئية من R^2 واللامتغيرة بالنسبة لـ f .

2- ليكن $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ مؤثراً خطياً حيث $\mathbb{C}^2$ فضاء متجهي فوق الحقل $\mathbb{C}$ معرف بالشكل: $f(x,y)=(2x-4y,5x-2y)$

والمطلوب:

أوجد جميع الفضاءات المتجهية الجزئية من $\mathbb{C}^2$ واللامتغيرة بالنسبة لـ f .

الحل:

نوجد مصفوفة f بالنسبة لأساس نظامي في $\mathbb{C}^2$ وهو الأساس:

$\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ وبالتالي يكون كما في التمرين (1) فإن:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة f كما أن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة السابقة هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 4\\ -5 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+16=0$$

ومنه نجد أن: $\lambda_1=4i\ ,\ \lambda_2=-4i$

من أجل القيمة $\lambda_1=4i$ وحتى يكون X متجهاً ذاتياً لـ A موافقاً للقيمة $\lambda_1=4i$ يجب أن يحقق : $A.X=4i\,X$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & -4\\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=4i\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}2x_1-4x_2=4i\,xi\Rightarrow(2-4i)x_1-4x_2=0\\ 5x_1-2x_2=4i\,x_2\qquad 2x_1-(2+4i)x_2=0\end{matrix}\right\}$$

وبالحل في $(-2+4i)\,x_1+4x_2=0$

وبالتالي : وبوضع $x_1=t$ نجد أن $x_2=\dfrac{1-2i}{2}t$ ومنه:

$$E_{\lambda_i}=\left\{\alpha\begin{bmatrix}2\\ 1-2i\end{bmatrix}:\alpha\in\mathbb{C}\right\}$$

ويكون $v_1=\begin{bmatrix}2\\ 1-2i\end{bmatrix}$ متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية $\lambda_1=4i$ وبنفس الطريقة تماماً نوجد المتجه الذاتي $v_2=\begin{bmatrix}2\\ 1+2i\end{bmatrix}$ الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_2=4i$. وبذلك يكون لدينا الفضاءات الجزئية اللامتغيرة بالنسبة لـ f هي :

$$W_2=span\,(2,1+2i)\ ,\ W_1=span\,(2,1-2i)\ ,\ \mathbb{C}^2,\{0\}$$

3- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمؤثر خطي f على الفضاء ثنائي البعد V ، حيث مصفوفة المؤثر f في الأساس $\{e_1,e_2\}$ للفضاء V تعطى بالشكل الآتي $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$.

الحل:

لدينا $AX = \lambda X$، ومنه:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على المعادلات

$$\begin{aligned} (\lambda - 2)x_1 - x_2 &= 0 \\ -3x_1 + \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

يوجد للمعادلات السابقة حل إذا وفقط إذا كانت محددة المعاملات تساوي الصفر وبالتالي:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ونحصل على المعادلة $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

إن جذور المعادلة هي القيم الذاتية للمصفوفة A ، أي أن $\lambda_1 = -1 , \lambda_2 = 3$.

من أجل $\lambda_1 = 3$ نعوض في المعادلات فنجد أن:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

وبالتالي يكون المتجه الذاتي $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$

من أجل $\lambda_2 = -1$ نجد أن المتجه الذاتي $v_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

4- أوجد كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة الخلايا المثلثية الآتية $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.

الحل:

لدينا

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda I_m - A_1 & -B \\ 0 & \lambda I_{n-m} - A_2 \end{vmatrix}$$

وبالتالي وحسب خواص المحددات:

$$det[\lambda I_n - A] = det|\lambda I_m - A_1| det|\lambda I_{n-m} - A_2|.$$

5- ليكن f مؤثراً خطياً على R^4 معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z,t)=(2y,x+4y,2t,2z)$$

والمطلــوب : أوجــد المصــفوفة المميــزة لــ f ثــم اســتنتج القــيم الذاتيــة لهــذا المؤثر.

الحل:

إن مصفوفة المؤثر الخطي f على R^4 هي:

$$f(1,0,0,0)=(2,1,0,0)=2.(1,0,0,0)+1(\ )+0(\ )+0(\ )$$

$$f(0,1,0,0)=(3,1,0,0)=3(\ )+1.(\ )+0(\ )+0(\ )$$

$$f(0,0,1,0)=(0,0,0,1)=0(\ )+0(\ )+0(\ )+1(\ )$$

$$f(0,0,0,1)=(0,0,1,1)=0(\ )+0(\ )+1(\ )+0(\ )$$

$$\Rightarrow\ A=\begin{bmatrix}2&3&0&0\\1&4&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

ومنه فإن المصفوفة المميزة هي:

$$[\lambda I-A]=\begin{bmatrix}\lambda-2&-3&0&0\\-1&\lambda-4&0&0\\0&0&\lambda&-2\\0&0&-2&\lambda\end{bmatrix}$$

كما أن:

$$\Delta(\lambda)=[\lambda I-A]=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&0&0\\-1&\lambda-4&0&0\\0&0&\lambda&-2\\0&0&-2&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4-6\lambda^3+\lambda^2+24\lambda-20$$

وهو كثيرة الحدود المميزة ومنه تكون المعادلة المميزة هي:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^4-6\lambda^3+\lambda^2+24\lambda-20=0$$

وبما أن:

$$\lambda^4-6\lambda^3+\lambda^2+24\lambda-20=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-5)$$

فإن القيمة الذاتية للمصفوفة A وبالتالي للمؤثر الخطي f هي:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 5$$

أي أن طيف المصفوفة A هو: $\{1, 2, -2, 5\}$.

6- لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

أوجد القيم الذاتية و المتجهات الذاتية للمصفوفة A.

الحل:

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A تعطى بالعلاقة:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}| = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 4 & 8 \\ 4 & \lambda - 7 & 4 \\ 8 & 4 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = (\lambda - 9)^2(\lambda + 9)$$

نوجد كثيرة الحدود المميزة فنجد أن $\lambda_1 = \lambda_2 = 9 , \lambda_3 = -9$

لإيجاد المتجهات الذاتية الموافقة يجب أن نحل جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$(9 - A)X = 0 \quad ,$$
$$(-9 - A)X = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على المتجهات الذاتية الموافقة:

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} , v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7- أوجد مصفوفة P^{-1} بحيث يكون الجداء $P^{-1}.AP$ مصفوفة قطرية علماً أن:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2$$

ومنه فإن المعادلة المميزة:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

وبالتالي فإن القيمة الذاتية للمصفوفة A هي:

$$\lambda_1=\lambda_2=1\ ,\ \lambda_3=-1, \lambda_4=-2$$

لدينا:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالتبديل في النظام السابق $\lambda_1=\lambda_2=1$ نجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبحل نظام المعادلات الخطي المتجانس السابق نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ومنه وحسب جاوص نجد: $(4-2=2)$

ومنه: $x_3=t$ و $x_4=s$

$$x_2 = 3x_3 = 3t$$

$$x_1 = 2t$$

وبالتالي:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ومنـــه نحصـــل علـــى المتجهـــين الـــذاتيين للمصـــفوفة A والمـــوافقين للقيمـــة الذاتيـــة $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ومنه:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وهما العمودان الأول والثاني من المصفوفة P المطلوبة.

وبنفس الطريقة نوجد P_3, P_4 من أجل $\lambda_3 = -1, \lambda_4 = -2$

$$p_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مما سبق نجد أن المصفوفة P المطلوبة هي:

$$P = \left[p_1 | p_2 |_3 | p_4\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث إن:

$$. \ p^{-1}.A.P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&-2\end{bmatrix}=diag\{1,1,-1,-2\}$$

8- ليكن k عدداً صحيحاً موجباً و λ قيمة ذاتية للمصفوفة A و v متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية λ. عندئذ تكون λ^k قيمة ذاتية للمصفوفة A^k الموافقة للمتجه الذاتي V.

الحل:

من العلاقة :

$$A^2v=A(Av)=A(\lambda v)=\lambda A(v)=\lambda^2 v$$

والتي تبين أن λ^2 قيمة ذاتية للمصفوفة A^2 الموافقة للمتجه الذاتي v. عندئذ يمكن تعميم ذلك ليصبح بالشكل الآتي:

$$A^nv=A(A(\dots A(v)))=\lambda^n v$$

9- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A ثم بين ان كانت المصفوفة A قابلة للتقطير . حيث: $A=\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$.

الحل:

نوجد المعادلة المميزة للمصفوفة A وهي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-s&1\\-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+16$$

$$=(\lambda-4)^2$$

ومنه فإن $\lambda_1=\lambda_2=4$ القيمة الذاتية الوحيدة وللحصول على متجه ذاتي مقابل للقيمة الذاتية نبدل بالمصفوفة المميزة نجد:

$$\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=x_2$$

وبالتالي $v_1=(1,1)$ متجه ذاتي موافق للقيمة $\lambda_1=\lambda_2=4$

إن المصـــفوفة A غيــر قابلـــة للتقطيــر لأن عــدد المتجهــات الذاتيـــة المســـتقلة خطياً هي 1 وبذلك لا توجد مصفوفة P بحيث : $p^{-1}Ap=D$ قطرية .

10− هـل المصـــفوفة التاليــة قابلـــة للتقطيــر أم لا و فـــي حـــال الإيجـــاب أو جــد المصفوفة p ، p^{-1} بحيث يكون $D=p^{-1}.A.p$. حيث:

$$A=\begin{bmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

الحل:

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A وهي:

$$A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[\lambda^2-4\right]$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+2)$$

وبالتـــالي القيمـــة الذاتيـــة هـــي: $\lambda_1=2$ ورتبـــة تضـــاعفها 2 و $\lambda_2=-2$ ورتبة تضاعفها 1 .

لنحسب المتجهات الذاتية لـ A وهي معينة بالمعادلات:

$$\left.\begin{aligned}\lambda x-2y&=0\\-2x+\lambda y&=0\\(\lambda-2)z&=0\end{aligned}\right\}$$

من أجل القيمة $\lambda_1=2$ نبدل بالمعادلات السابقة نجد:

$$\begin{aligned}2x-2y&=0\\-2x+2y&=0\\0z&=0\end{aligned}$$

بالحــل نجــد أن Z اختيـــاري، $x=y$ ويقابـــل القيمـــة الذاتيـــة $\lambda=2$ متجهـــان ذاتيان هما:

$v_2=(0,0,1)$ ، $v_1=(1,1,0)$ وهما أساس لـ $E_{\lambda_1=\lambda_2=2}$

ومن أجل القيمة الذاتية $\lambda_3=-2$ نبدل في النظام الخطي السابق نجد :

$$\left.\begin{aligned}-2x-2y&=0\\-2x-2y&=0\\-4z&=0\end{aligned}\right\}$$

بالحل نجد:

$$x=-y$$
$$z=0$$

ويقابل القيمة $\lambda=-2$ المتجه الذاتي $v_3=(1,-1,0)$ وبذلك نجد في هذا المثال أن: $\dim E_{\lambda_1=\lambda_2}=2$ رتبة تضاعف $\lambda_1=\lambda_2$ وأيضاً $E_{\lambda_3}=1$ رتبة تضاعف λ_3 .

وهذا يعني أن المصفوفة A قابلة للتقطير. ومنه فإن:

$$p=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

وبسهولة نجد أن مقلوب P هو:

$$p^{-1}=1/2\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

وأخيراً يكون لدينا:

$$p^{-1}.A.p=1/2\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\1&-1&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

11- احسب A^n للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}-1&3&-2\\3&-1&-2\\0&0&6\end{bmatrix}$$

إن القيم الذاتية لـ A هي: $\lambda_1=6\ ,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$ كما أن المتجهات الذاتية الموافقة لهذه القيمة هي:

$$v_1=(-1,1,-2)\ ,\ v_2=(1,1,0), v_3=(-1,1,0)$$

على الترتيب ومنه:

$$p = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad p^{-1} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = p.D^n.p^{-1} = 1/2 \begin{bmatrix} 2^n + (-4)^n & 2^n - (-4)^n & 6^n - (-4)^n \\ 2^2 - (-4)^n & 2^n + (-4)^n & (-4)^n - 6^n \\ 0 & 0 & 2.6^n \end{bmatrix}$$

12- وبالاعتماد على مبرهنة كيلي- هاملتون أوجد مقلوب المصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هو:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$$

وبتطبيق مبرهنة كيلي- هاملتون نجد:

$$A^3 - 3A^2 - A + 3I = 0$$

$$\Rightarrow 3I = -A^3 + 3A^2 + A \Rightarrow$$

$$3A^{-1} = -A^2 + 3A + I \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\left(A^2 - 3A - I\right)$$

نبدل لدينا:
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = A.A$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-1/3\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&-4\\0&-4&5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3&0&0\\-6&1&2\\-6&2&1\end{bmatrix}$$

13− ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي R^3 معرفاً بالشكل الآتي:

$$f(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$$

والمطلوب:

1) بين فيما إذا كانت مصفوفة المؤثر f في أساس ما للفضاء R^3 قابلة للتقطير أم لا ؟

2) وإذا لم يكن f قابلاً للتقطير عندها ثلّث (قم بتثليث) المؤثر الخطي.

الحل:

1) لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

وبالتالي فإن $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ هما القيمتان الذاتيتان للمؤثر f.

من أجل $\lambda_1=2$ لدينا المتجه الذاتي $v_1=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ الموافق لها،

وكذلك من أجل $\lambda_2 = 3$ يكون لدينا $v_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي موافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 3$.

إن f غير قابل للتقطير لأن للمصفوفة A فقط متجهين ذاتيين مستقليين خطياً في حين أن $\dim R^3 = 3$

2) تثليث المؤثر الخطي:

لدينا $\lambda_1 = 2\ ,\ \lambda_2 = 3$ ويقابلها المتجهان الذاتيان: $v_1 = (1,0,0)$ ، $v_2 = (1,1,-2)$. نقول بإكمال هذه المتجهات للأساس المرتب التالي للفضاء R^3 :

$$H = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,-2), v_3 = (0,0,1)\}$$

نحسب مصفوفة f بالنسبة للأساس H فنجد:

$$f(1,0,0) = (2,0,0) = 2.(1,0,0) + 0v_2 + 0v_3$$

$$f(1,1,-2) = (3,3,-6) = 0(1,0,0) + 3(1,1,-2) + +0v_3$$

$$f(0,0,1) = (0,-1,4) = 1(1,0,0) - 1(1,1,-2) + 2(0,0,1)$$

ومنه تكون المصفوفة المطلوبة هي:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة مثلثية عليا.

14- هل المؤثر الخطي f ثلوث في R^3 حيث $f : R^3 \to R^3$ معرف بالشكل:

$$f(x,y,z) = (3x + 2y + z, -x, z, x + y + 2z)$$

وإذا كان الجواب بالإيجاب فأوجد المصفوفة المثلثية المشابهة لمصفوفة f .

الحل:

إن مصفوفة f هي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وكثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\left[\lambda(\lambda-2)+1\right] + 2\left[(\lambda-2)+1\right] - 1(-1+\lambda)$$

$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

وهذا يعني أنه المؤثر الخطي قابل للتثليث . ولهذا المؤثر القيمتان الذاتيتيان: $\lambda_2 = 2$ و $\lambda_1 = 1$.

ويقابلهما المتجهان الذاتيان:

$$v_1 = (1,-1,0)\ ,\ v_2 = (1,-1,1)$$

نكمل هذه المتجهات إلى أساس مرتب للفضاء R^3 نجد:

$$H = \{v_1 = (1,-1,0), v_2 = (1,-1,1), e_3 = (1,0,0)\}$$

ثم نحسب مصفوفة f بالنسبة لـ H :

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0) = 1(1,-1,0) + ov_2 + oe$$

$$f(1,-1,1) = (2,-2,2) = 0(1,-1,0) + 2v_2 + oe$$

وبالتالي فالمصفوفة T بالنسبة للأساس H هي:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

والآن إذاً حسبنا مصفوفة الانتقال P من الأساس النظامي إلى الأساس H للفضاء المتجهي R^3 نجد أن:

$$v_1 = (1,-1,0) = 1.e_1 - 1e_2 + 0e_3$$

$$v_2 = (1,-1,1) = 1.e_1 - 1e_2 + 1.e_3$$

$$e_3 = (1,0,0) = 1.e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

ومنه فإن:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و كون p^{-1} هي:

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

فمن السهل التأكد من أن: $T = p^{-1}.A\,p$

15− اختزل المصفوفة التالية إلى الشكل المثلثي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3 (\lambda - 3)$$

وقيمها الذاتية هي: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 3$ ويقابل هذه القيم الذاتية

$$v_1 = (1,0,0,0)\ ,\ v_2 = (0,0,1,2)$$

نكمل هذه المتجهات إلى أساس مرتب للفضاء R^4 هو:

$$B = \{v_1 = (1,0,0,0), v_2 = (0,0,1,2), e_3 = (0,1,0,0), e_4 = (0,0,0,1)\}$$

نحسب مصفوفة الانتقال p من الأساس النظامي إلى الأساس B للفضاء R^4 نجد:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ v_2 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 2e_4 \\ v_3 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ v_4 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 1e_4 \end{array}\right\} \Rightarrow p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فتكون p^{-1} هي مصفوفة الانتقال من الأساس B إلى الأساس النظامي لـ R^4 :

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ e_2 = 0v_1 + 0v_2 + 1e_3 + 0e_4 \\ e_3 = 0v_1 + 1v_2 + 0e_3 + 2e_4 \\ e_4 = 0v_1 + 0v_2 + 0e_3 + 1e_4 \end{array}\right\} \Rightarrow p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن السهل التأكد أن:

$$T = p^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

تمارين غير محلولة

1- ليكن $T : p_2 \to p_2$ مؤثراً خطياً معرفاً بالشكل:

$$T(a+bx+cx^2) = (-2a-b+2c)+(a+b)x+(-6a-2b+5c)x^2$$

برهن أن الفضاء الجزئي W من P_2 والمولّد بالجملة $\{x, 1+2x^2\}$ هو فضاء جزئي لا متغير بالنسبة لـ T.

2- ليكن $f . R^2 \to R^2$ مؤثرا" خطيا" معرفا" بالشكل:

$$f(x,y) = (2x-5y, x-2y)$$

المطلوب:

أوجد جميع الفضاءات الجزئية اللامتغيرة من R^2 بالنسبة لـ f .

3- ليكن $f : C^2 \to C^2$ مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$f(x,y) = (2x-5y, x-2y)$$

والمطلوب:

أوجد جميع الفضاءات الجزئية اللامتغيرة من C^2 بالنسبة لـ f .

4- بفرض أن V فضاء متجهي فوق الحقل F وليكن W فضاء جزئياً لا متغيراً بالنسبة للمؤثرين $T : V \to V$ و $S : V \to V$. عندها أثبت أن W لا متغير بالنسبة :

1) $S+T$ 2) $S \circ T$ 3) $K.T$ حيث $K \in Z^+$

5- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكل من المصفوفات:

$$(a)\begin{bmatrix}1 & 5\\3 & 3\end{bmatrix}, \qquad (b)\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 1\\4 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 2 & 0 & 0\\1 & 0 & 3 & 0\\0 & 1 & -1 & 4\end{bmatrix}, \qquad (d)\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\2 & 0 & 2\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

6− أثبت أن $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ ، $tr(cA) = c\,tr(A)$ ، حيث إن A, B مصفوفتان مربعتان من المرتبة n و c عدد ثابت.

7− A, B مصفوفتان مربعتان من المرتبة n ، أثبت أن AB و BA لهما القيم الذاتية نفسها.

(تنويه: لتكن c قيمة ذاتية لـAB، برهن أنها قيمة ذاتية لـ BA).

8− لنفرض أن A مصفوفة مربعة عناصرها حقيقية وقيمها الذاتية حقيقية. أثبت أن كل قيمة ذاتية لـA توافق متجهاً ذاتياً حقيقياً.

9− إذا كانت A مصفوفة حقيقية بقيم ذاتية مختلفة ، عندئذ Aقابلة للتقطير على R .

صح أم خطأ ؟

10− بين أن المصفوفات التالية قابلة للتقطير وفي حال كونها كذلك عين مصفوفة p بحيث يكون: $p^{-1}.A.p$ قطرية.

1) $(a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $(b)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3) $(c)\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ 4) $(d)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

5) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7) $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ 8) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

9) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 10) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11) $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 12) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11− إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -6 & -6 & -5 \end{bmatrix}$ فأثبت أن A قابلة للتقطير ثم عين P بيث تكون $p^{-1}.AP$ قطرية ، كذلك عين مصفوفة B بحيث يكون $B^2 = A$.

12− لتكن A مصفوفة قابلة للتقطير، ولنفرض أن S مصفوفة بحيث إنها تجعل A قطرية. أثبت أن مصفوفة T تجعل A قطرية إذا وفقط إذا كانت من الشكل $T = CS$ ، حيث C مصفوفة تحقق $AC = CA$.

13− إذا كانتA مصفوفة عكوسة قيمها الذاتية $c_1, \dots, c_n$ ، أثبت أن القيم الذاتية للمصفوفة A^{-1} هي ${c_1}^{-1}, \dots, {c_n}^{-1}$.

14− ليكن $f: V \rightarrow V$ مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي المركب V المنتهي البعد وبعده n.

برهن أنه يوجد أساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ من V ، بحيث يكون $f(v_i)$ مجموعاً خطياً لـ $v_i, \dots, v_n$ ، حيث $i = 1, \dots, n$.

15− ليكن $f: P_n(R) \rightarrow P_n(R)$ مؤثراً خطياً مطابقا" للتفاضل.

برهن أن جميع القيم الذاتية لـ f تساوي الصفر. وما هي متجهاتها الذاتية ؟

16− لتكن $c_1, \dots, c_n$ القيم الذاتية للمصفوفة المركبة A. برهن أن القيم الذاتية لـ A^m هي ${c_1}^m, \dots, {c_n}^m$ ، حيث إن m أي عدد صحيح موجب.

17− أثبت أن للمصفوفة المربعة المركبة و منقولها القيم الذاتية نفسها.

18- ليكن المؤثر الخطي π على الفضاء المتجهي R^3 والمعرف بالشكل الآتي:

$$\pi(x,y,z)=\frac{1}{3}(2x-y-z,-x+2y-z,-x-y+2z)$$

أثبت أن πإسقاط ، وأوجد $Im\,\pi$ وكذلك $ker\,\pi$.

19- إذا كان $f,g\in Hom(V,V)$ بحيث أن $fog=I_V$ ، برهن أن gog مؤثر إسقاط على V .

20- أوجد القوى n للمصفوفات الآتية:

$$(a)\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&0&-1\\2&2&-1\end{bmatrix}\quad,\qquad(b)\begin{bmatrix}5&1&-1\\2&4&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

21- لتكن: $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من المرتبة 4 ، برهن أن A مصفوفة قابلة للتقطير . واحسب P ، ثم احسب A^{-2},A^{-1},A^3,A^2 .

22- اختزل المصفوفات إلى الشكل المثلثي:

$$a)\ \begin{bmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\0&0&2&-1\end{bmatrix}\quad,\ b)\ \begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&0&2\end{bmatrix},\ c)\ \begin{bmatrix}3&2&1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

23- هل المصفوفات التالية ثلوثة في R .

$$A=\begin{bmatrix}-3&-6&7\\4&1&-1\\-4&-6&8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&3&1\\1&0&1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}2&-6&-6\\-1&1&2\\3&-6&-7\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

وإذا كان جواب بالإيجاب فأوجد المصفوفات المثلثية العليا المشابهة لكل منها.

الفصل الرابع

فضاءات الضرب الداخلي
Inner Product Spaces

لم نتعرض في جميع دراستنا في الجبر الخطي لمفهوم الطول والزاوية رغم أهميتها وخاصة في الفضاءين $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$، حيث يلعب قياس المتجه والزاوية بين المتجهين دوراً هاماً وأساسياً، فمن أسباب نشوء فضاءات المتجهات هو شمولية الدراسة وتجريدها.

لأجل هذا الهدف أدخل مفهوم الضرب الداخلي على فضاءات المتجهات والذي يساعدنا في تعميم عدد كبير من المفاهيم المعروفة، نذكر منها مفهوم الطول والزاوية بين متجهين.

(4−1) مفهوم الضرب الداخلي
Concept of Inner Product

تعريف (1−1):

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل العددي F (حيث $F = \mathbb{R}$ أو $F = \mathbb{C}$).عندئذ نسمي الدالة (التطبيق):

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow F$$
$$(u, v) \longrightarrow \langle u, v\rangle$$

ضرباً داخلياً (Inner Product) على الفضاء المتجهي V إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

2) $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$

3) $\langle u, u\rangle \geq 0 \quad \& \langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$

وذلك $\forall\, u, v, w \in V\ , \forall \alpha, \beta \in F$

- نسمي العدد $\langle u,v\rangle$ الضرب الداخلي للمتجه u بالمتجه v.
- نستنتج من التعريف السابق ما يلي:

1) إن الضرب الداخلي $\langle u,v\rangle$ للمتجه u في المتجه v قد يكون عدداً مركباً أوعدداً حقيقياً، لكن دوماً يكون الضرب $\langle u,u\rangle$ عدداً حقيقياً وذلك مهما يكن $u\in V$.
2) بالاعتماد على الشرطين 1) و 2) في تعريف الضرب الداخلي نجد أن $\langle u,v\rangle$ نصف خطي بالنسبة لـ v أي أن:

$$\langle u\,,\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\rangle=\overline{\langle \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\,,u\rangle}=\overline{\alpha_1\langle v_1\,,u\rangle+\alpha_2\langle v_2\,,u\rangle}$$
$$=\overline{\alpha_1}\,.\overline{\langle v_1\,,u\rangle}+\overline{\alpha_2}\,.\overline{\langle v_2\,,u\rangle}=\overline{\alpha_1}\langle u\,,v_1\rangle+\overline{\alpha_2}\langle u\,,v_2\rangle$$

ملاحظات(1−1):

1) في الحالة العامة إنّ $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$ وبالتالي ليس من الضروري أن يكون $\langle u,v\rangle$مساوياً لـ$\langle v,u\rangle$ ويتم التساوي عندما يكون $\langle u,v\rangle$ عدداً حقيقياً فقط.
2) يمكن أن نعرّف على الفضاء المتجهي Vأكثر من ضرب داخلي واحد.

تعريف (2−1):

ليكنV فضاءً متجهياً على الحقل العددي F، نقول إن V هو فضاء ضرب داخلي (Inner product space) إذا كان معرفاً عليه ضرب داخلي $\langle\,,\rangle$

ونكتب: $(V,\langle\,,\rangle)$.

إذا كان الفضاء V منتهياً بعده n، فإن الفضاء الحقيقي بالضرب الداخلي القياسي يسمى فضاءً إقليدياً (Euclidean space).

كما يسمى الفضاء المركب بالضرب الداخلي القياسي فضاءً واحدياً (Unitary space) ويسمى فضاءً هرميتياً. ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

مثال (1−1):

إذا كان $V = \mathbb{C}^n$ وعرّفنا التطبيق:

$$\langle\, ,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

كمايلي:

إذا كان $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ عنصرين من V فإنّ:

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

هو ضرب داخلي على الفضاء V، نسميه عادة بالضرب الداخلي القياسي على $\mathbb{C}^n$

وهو يحقق الشروط الواردة في التعريف (1−1).

1) إذا كان $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ فإن:

$$\alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{bmatrix}$$

ويكون:

$$\langle \alpha X + \beta Y, \mathrm{Z}\rangle = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\alpha x_i + \beta y_i)\,.\,\overline{\mathrm{z_i}} = \alpha \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_i \overline{\mathrm{z_i}} + \beta \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} y_i \overline{\mathrm{z_i}}$$
$$= \alpha\langle X, Z\rangle + \beta\langle Y, Z\rangle$$

أي أنه خطي بالنسبة لـX.

2) $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \Longrightarrow \overline{\langle X, Y\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \langle Y, X\rangle$

3) ونجد أيضاً أن: $\langle X, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$

وإذا كان: $\langle X, X\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$

وبالتالي فإن $\langle\, ,\rangle$ هو ضرب داخلي على $\mathbb{C}^n$.

وفي الحالة الخاصة فإن:

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

هو ضرب داخلي على $\mathbb{R}^n$ وهو الضرب الداخلي القياسي.

مثال (1−2):

ليكن V فضاء متجهياً والمكون من كل المصفوفات من المرتبة الثانية على حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ أي:

$$V = M_{2\times 2}(\mathbb{C}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : a, b, c, d \in \mathbb{C}\right\}$$

نبين أن التطبيق المعرف بالشكل:

$$\langle \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \rangle = a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2} + d_1\overline{d_2}$$

يشكل ضرباً داخلياً على V وبالتالي فإن V هو فضاء واحدي (هرميتي).

الحل:

لنتحقق من صحة الشروط الواردة في التعريف (1−2) لتكن:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad \in V$$

1)

$$\langle A_1, A_2\rangle = \langle \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \rangle = a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2} + d_1\overline{d_2}$$

$$= \overline{\overline{a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2} + d_1\overline{d_2}}} = \overline{\overline{a_1\overline{a_2}} + \overline{b_1\overline{b_2}} + \overline{c_1\overline{c_2}} + \overline{d_1\overline{d_2}}}$$

$$= \overline{\overline{a_1}a_2 + \overline{b_1}b_2 + \overline{c_1}c_2 + \overline{d_1}d_2} = \overline{a_2\overline{a_1} + b_2\overline{b_1} + c_2\overline{c_1} + d_2\overline{d_1}}$$

$$= \overline{\langle \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \rangle} = \overline{\langle A_2, A_1\rangle}$$

2)

$$\langle \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \rangle$$

$$= \langle \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \rangle$$

$$= (\alpha a_1 + \beta a_2).\overline{a_3} + (\alpha b_1 + \beta b_2).\overline{b_3} + (\alpha c_1 + \beta c_2).\overline{c_3} + (\alpha d_1 + \beta d_2).\overline{d_3}$$

$$= \alpha\left(a_1.\overline{a_3} + b_1.\overline{b_3} + c_1.\overline{c_3} + d_1.\overline{d_3}\right) + \beta\left(a_2.\overline{a_3} + b_2.\overline{b_3} + c_2.\overline{c_3} + d_2.\overline{d_3}\right)$$

$$= \alpha \langle \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \rangle + \beta \langle \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \rangle$$

3)

$$\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rangle = a.\bar{a} + b.\bar{b} + c.\bar{c} + d.\bar{d}$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \geq 0$$

$$\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rangle = 0 \iff |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 0 \iff$$

$$a = b = c = d = 0 \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهو المطلوب.

مثال (1−3):

إذا كان V فضاء الدوال المركبة و المستمرة على المجال [0,1]، إذا وضعنا:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad , \forall f, g \in V$$

فإننا نجد أن ⟨ , ⟩ هي دالة ضرب داخلي على V لأن:

$$1)\ \overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\int_0^1 g(x).\overline{f(x)}\, dx} = \int_0^1 \overline{g(x)}.\overline{\overline{f(x)}}\, dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx = \langle f, g \rangle$$

$$2)\ \langle \alpha f+\beta g,\mathrm{h}\rangle=\int_0^1\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\overline{h(x)}\ dx$$

$$=\alpha\int_0^1 f(x).\overline{h(x)}\ dx\ +\beta\int_0^1 g(x).\overline{h(x)}\ dx$$

$$=\alpha\langle f,h\rangle+\beta\langle g,h\rangle$$

$$3)\ \langle f,f\rangle=\int_0^1 f(x)\overline{f(x)}\,dx=\int_0^1 |f(x)|^2.dx\ \geq 0$$

وهذا التكامل يساوي الصفر إذا وفقط إذا كان $f=0$.

مبرهنة (1−1):

إذا كان $\langle\,,\rangle$ تطبيق ضرب داخلي على فضاء V، فإن الشروط الآتية محققة:

1) $\langle v,\alpha u+\beta w\rangle=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle+\bar{\beta}\langle v,w\rangle$

وفي الحالة الخاصة $\langle v,\alpha u\rangle=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle$

2) $\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle=2Re\,\langle v,u\rangle$

3) $\langle 0,u\rangle=\langle v,0\rangle=0$

وذلك مهما كان u,v,w من V و $\alpha,\beta \in K$.

البرهان:

من تعريف تطبيق الضرب الداخلي وخواص مرافق العدد المركب يكون لدينا ما يلي:

(1

$$\langle v,\alpha u+\beta w\rangle=\overline{\langle \alpha u+\beta w,v\rangle}$$
$$=\overline{\alpha\langle u,v\rangle+\beta\langle w,v\rangle}$$
$$=\bar{\alpha}.\overline{\langle u,v\rangle}+\bar{\beta}.\overline{\langle w,v\rangle}$$
$$=\bar{\alpha}.\langle v,u\rangle+\bar{\beta}.\langle v,w\rangle$$

والحالة الخاصة تنتج بأخذ $\beta=0$.

2)

إذا كان $\langle v,u\rangle = x + y\, i$ فإن $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle} = x - y\, i$، ومنه:

$$\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle = 2\, x = 2\, Re\, \langle v,u\rangle$$

(إذا كان Z عدداً مركباً فإن Re Z يرمز لقسمه الحقيقي)

3)

$$\langle 0,u\rangle = \langle v - v,u\rangle = \langle v,u\rangle - \langle v,u\rangle = 0$$

كما أن $\langle v,0\rangle = \overline{\langle 0,v\rangle} = \bar{0} = 0$

(2−4) النظيم (الطويلة) في فضاء الضرب الداخلي
Norms in Inner Product Space

تعريف (2−1):

إذا كان $(V,\langle,\rangle)$ فضاء ضرب داخلي ، وليكن u متجهاً من V، نعرف نظيم (طويلة) (length or norm) u والذي نرمز له بالرمز $\|u\|$ كما يأتي:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

والنظيم كما نرى هو عدد حقيقي غير سالب، أي أن $\|u\| \geq 0$.

مبرهنة (2−1):

إذا كان u متجهاً من الفضاء المركب (الحقيقي) بضرب داخلي، فإن:

1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

2) $\|\alpha . u\| = |\alpha| . \|u\|$

البرهان:

إن برهان 1) واضح وينتج من تعريف النظيم.

ولبرهان تحقق 2) لدينا:

$$\|\alpha\, u\|^2 = \langle \alpha\, u, \alpha\, u\rangle = \alpha . \bar{\alpha} \langle u,u\rangle = |\alpha|^2 . \|u\|^2$$

ومنه ينتج أن:

$$\|\alpha.u\| = |\alpha|.\|u\|$$

مبرهنة (2−2): متراجحةكوشي ـ شفارتز

:Cauchy-Schwartz Inequality

إذا كان $(V,\langle,\rangle)$فضاءً مركباً (حقيقياً) بضرب داخلي، فإن:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|.\|v\| \quad , \quad \forall\, u,v \in V$$

(حيث $|\langle u,v\rangle|$ هي طويلة العدد المركب $\langle u,v\rangle$ إذا كان V فضاءً مركباً وهي القيمة المطلقة للعدد الحقيقي $\langle u,v\rangle$ إذا كان فضاءً حقيقياً).

البرهان:

إذا كان أحد المتجهين u,v صفراً فإن المبرهنة صحيحة لذلك نفرض أن

$$u \neq 0\,, v \neq 0$$

ولنأخذ المتجه:

$$w = \langle u,u\rangle v - \langle v,u\rangle u$$

ولنحسب أولا الضرب $\langle w,u\rangle$ فنجد:

$$\langle w,u\rangle = \langle \langle u,u\rangle v - \langle v,u\rangle u, u\rangle$$
$$= \langle u,u\rangle\langle v,u\rangle - \langle v,u\rangle\langle u,u\rangle = 0$$

لنحسب الآن $\|w\|^2$ فنجد:

$$0 \leq \|w\|^2 = \langle w,w\rangle = \langle \langle u,u\rangle v - \langle v,u\rangle u, \langle u,u\rangle v - \langle v,u\rangle u\rangle$$
$$= \langle \langle u,u\rangle v - \langle v,u\rangle u, \langle u,u\rangle v\rangle$$
$$= \langle u,u\rangle\langle v, \langle u,u\rangle v\rangle - \langle v,u\rangle\langle u, \langle u,u\rangle v\rangle$$
$$= \|u\|^2[\|u\|^2.\|v\|^2 - \langle v,u\rangle.\langle u,v\rangle]$$

ومنه:

$$0 \leq \|u\|^2[\|u\|^2.\|v\|^2 - |\langle u,v\rangle|^2]$$

وبما أن $u \neq 0$ فإننا نستنتج أن:

$$|\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2.\|v\|^2$$

وبالتالي فإن:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$$

وهو المطلوب.

نتيجة (2−1):

ليكن $(V,\langle,\rangle)$ فضاء ضرب داخلي وليكن $u,v\in V$ عندئذ

$|\langle u,v\rangle| = \|u\|.\|v\|$ إذا وفقط إذا كان المتجهان u,v مرتبطين خطياً.

البرهان:

$\Leftarrow$) لنفرض أولاً أن $|\langle u,v\rangle| = \|u\|.\|v\|$

عندئذ نجد أن $\langle w,w\rangle = 0$، حيث $w = \langle u,u\rangle v - \langle v,u\rangle u$ كما في المبرهنة (2−2) السابقة، ولذا فإن $w = 0$ ، أي أن:

$$v = \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2}\, u$$

وبالتالي فإن u,v متجهان مرتبطان خطياً.

$\Rightarrow$) لنفرض أن u,v متجهان مرتبطان خطياً، وبالتاي يوجد $\alpha\in\mathbb{R}$، بحيث إن $v = \alpha u$. الآن:

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle^2 &= \langle u,\alpha u\rangle^2 = \alpha^2\langle u,u\rangle^2 = \alpha^2.\langle u,u\rangle\langle u,u\rangle\\ &= \langle u,u\rangle\langle \alpha.u,\alpha.u\rangle = \langle u,u\rangle.\langle v,v\rangle\\ &= \|u\|^2.\|v\|^2\end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$|\langle u,v\rangle| = \|u\|.\|v\|$$

مبرهنة (2−3): متراجحة المثلث (Triangle Inequality):

إذا كان $(V,\langle,\rangle)$ فضاء ضرب داخلي مركب (حقيقي) فإن:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad , \qquad \forall\, u,v \in V$$

البرهان:

نعلم أنه إذا كان $Z = a + b\,i$ عدداً مركباً فإن:

$$Re\,Z = a \le \sqrt{a^2 + b^2} = |Z|$$

لدينا

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2Re\langle u,v\rangle$$
$$\le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u,v\rangle|$$

وبالاعتماد على مبرهنة(كوشي _ شفارتز) نجد:

$$\|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|.\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

وبالجذر نجد أن:

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

ملاحظة (2−1):

1− نلاحظ أن:

$$\|u-v\| = \|u+(-1)v\| \le \|u\| + \|(-1)v\| = \|u\| + |-1|\|v\|$$
$$= \|u\| + \|v\|$$

ومنه فإن:

$$\|u \mp v\| \le \|u\| + \|v\|$$

2− إن فضاء الضرب الداخلي $(\mathrm{V}, \langle , \rangle)$ ، على $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$ هو فضاء متري، والمسافة فيه هي $d(u,v) = \|u-v\|$ وذلك لأن:

1) $d(u,v) \ge 0$

2) $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

3) $d(u,v) = d(v,u)$

4) $d(u,w) \le d(u,v) + d(v,w)$

وجميعها يمكن التحقق منها بسهولة.

(3−4) الزوايا في فضاء الضرب الداخلي
Angles in inner product space

سنبيّن الآن كيفية الاستفادة من متراجحة كوشي –شفارتز لتعريف الزاوية بين متجهين في فضاء ضرب داخلي.

ليكن $(V,\langle,\rangle)$ فضاءً حقيقياً بضرب داخلي وليكن $u,v \in V$.

من متراجحة كوشي شفارتز لدينا:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$$

وبفرض $u,v \neq 0$ فإنه ينتج:

$$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|.\|v\|} \leq 1$$

عندئذ، حسب خواص القيمة المطلقة، هذا يكافئ:

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|.\|v\|} \leq 1$$

وبالتالي يمكن تعيين زاوية θ، بحيث $0 \leq \theta \leq \pi$، وبحيث يكون:

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|.\|v\|} = cos\,\theta \implies$$

$$\langle u,v\rangle = \|u\|.\|v\|.cos\,\theta$$

إذا كان $u = \lambda.v$، أي أن المتجهين u,v مرتبطان خطياً فإن:

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|.\|v\|} = \frac{\lambda\langle v,v\rangle}{|\lambda|.\|v\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1 & ,\lambda > 0 \\ -1 & ,\lambda < 0 \end{cases}$$

وبالتالي فإن:

$$\theta = \begin{cases} 0 & ,\lambda > 0 \\ \pi & ,\lambda < 0 \end{cases}$$

في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^2$، نقول إن المتجهين u,v مرتبطان خطياً، أي أن$u = \lambda.v$عندما نقولإن u,v متوازيان، نعني بذلك أنهما متفقان بالجهة $(\lambda > 0)$، أومختلفان بالجهة $(\lambda < 0)$، وتكون الزاوية بينهما صفراً أوπ.

ويبرهن هندسياً على أن θ تمثل دوماً الزاوية الواقعة بين المتجهين u, v.

مثال (3−1):

أوجد $\cos\theta$ من أجل الزاوية θ بين $u(1,2)$ و $v(-1,3)$ في $\mathbb{R}^2$، حيث الضرب الداخلي كما في المثال (1−1) هو الضرب الداخلي القياسي.

لدينا:

$$\|u\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad , \quad \|v\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$\langle u, v\rangle = -1 + 6 = 5$$

ومنه:

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5}\,.\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإن $\theta = \frac{\pi}{4}$.

مثال(3−2):

أوجد $\cos\theta$ من أجل الزاوية θ بين $f(x) = 3x - 1$ و $g(x) = x - 1$

في الفضاء المتجهيV لكثيرات الحدود بالضرب الداخلي:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).\,g(x).\,dx$$

لدينا:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 (3x-1).\,(x-1).\,dx = \int_0^1 (3x^2 - 3x - x + 1)dx$$
$$= \int_0^1 (3x^2 - 4x + 1)\,dx = [x^3 - 2x^2 + x]_0^1 = 0$$
$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_0^1 (3x-1)^2 dx = \int_0^1 (9x^2 - 6x + 1)dx$$
$$= [3x^3 - 3x^2 + x]_0^1 = 1$$

$$\Longrightarrow \|f\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g\rangle = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومنه:

$$\cos\theta = \frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|.\|g\|} = \frac{0}{1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = 0$$

وبالتالي فإن:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

مثال (3−3):

أوجد $\cos\theta$ من أجل الزاوية θ بين $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & +1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ في الفضاء المتجهي للمصفوفات $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$، حيث يعرف الضرب الداخلي بواسطة $\langle A, B\rangle = tr\ (B^t.A)$.

لدينا:

$$\langle A, B\rangle = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & +1 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = 2$$

$$\|A\|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & +1 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 15$$

$$\|A\| = \sqrt{15}$$

$$\|B\|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = 14$$

$$\|B\| = \sqrt{14}$$

ومنه:

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{15}.\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{210}}$$

(4−4) التعامد في فضاءات الضرب الداخلي
Orthogonality of vectors inner product

تعريف(4−1):

ليكن$(V,\langle,\rangle)$ فضاءً مركباً (أو حقيقياً) وليكن u,v متجهين اختياريين من V. عندئذ نقول عن u,v إنهما متعامدان إذا كان $\langle u,v\rangle = 0$ (أي إذا وفقط إذا كانت الزاوية بينهما $\theta = \frac{\pi}{2}$ في حالة الفضاء الحقيقي). ونعبر عن ذلك بالكتابة $u \perp v$.

ملاحظة(4−1):

1− إن علاقة التعامد متناظرة، أي أنه إذا كان $u \perp v$ فإن $\langle u,v\rangle = 0$

وبالتالي فإن $\langle v,u\rangle = \overline{\langle u,v\rangle} = 0$، ومنه $v \perp u$.

2− يكون المتجه u متعامداً مع نفسه إذا وفقط إذا كان $u = 0$ لأن:

$$u = 0 \Leftrightarrow \langle u,u\rangle = 0$$

3− المتجه الصفري يتعامد مع نفسه ومع أي متجه آخر.

تعريف (4−2):

لتكن S مجموعة جزئية من فضاء الضرب الداخلي $(V,\langle,\rangle)$، نقول إن S مجموعة متعامدة (Orthogonal) إذا كان كل متجهين مختلفين من S متعامدين.

وبالإضافة لذلك تكون Sمتعامدة منظمة إذا كانت متعامدة و نظيم كل متجه منها يساوي الواحد، أي أنه تكون مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة متعامدة ومنظمة لـV إذا كان:

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

أمثلة (4−1):

1− إن الأساس النظامي في $\mathbb{C}^*$ ($\mathbb{R}^*$) هو:

$$\{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \dots \dots \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$$

وهو مجموعة متعامدة منظمة.

2- إذا كانت

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1) \quad , v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,0,1) \quad , v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,1)$$

ثلاثة متجهات في فضاء الضرب الاقليدي $\mathbb{R}^4$ فإن:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

كما أن:

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$$

ولهذا فإن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ هي مجموعة متعامدة منظمة.

3- ليكن $V = \mathbb{C}[0,1]$ فضاء الدوال المركبة المستمرة على المجال $[0,1]$ بالضرب الداخلي

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x).\overline{g(x)}\,.\,dx$$

عندئذ المجموعة:

$$\mathcal{W} = \{f_n \in V : f_n(x) = \cos 2\pi nx + i \sin 2\pi nx \quad ;\ n \in \mathbb{N}\}$$

هي مجموعة متعامدة ومنظمة.

البرهان:

باستخدام قوانين أولر

$$\cos\theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} \qquad , \qquad \sin\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2}$$

نجد بسهولة

$$f_n(x) = e^{2\pi nxi} \quad , \quad \overline{f_n(x)} = e^{-2\pi nxi}$$

ومنه:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^1 f_n(x).\overline{f_m(x)}\ dx = \int_0^1 e^{2\pi(n-m)xi} dx$$

فإذا كان $n = m$ عندئذ نجد أن:

$$\langle f_n, f_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi(n-n)xi} dx = \int_0^1 dx = 1$$

وإذا كان $n \neq m$. عندئذ نجد أن:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^1 e^{2\pi(n-m)xi} dx = \frac{1}{2\pi(n-m)i} \cdot \left[e^{2\pi(n-m)xi}\right]_0^1 = 0$$

مبرهنة (4−1):

إذا كانت S مجموعة متجهات متعامدة غير صفرية من فضاء الضرب الداخلي

$(V, \langle , \rangle)$فإن S تكون مستقلة خطياً.

البرهان:

يكفي برهان ذلك من أجل عدد منتهٍ من المتجهات، ولتكن $\{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ مجموعة جزئية منتهية كيفية من S ولنبرهن على أنها مستقلة خطياً.

لنفرض أن:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_t = 0 \qquad (1)$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in F$.

ولنأخذ الضرب الداخلي لـ (1) مع u_i.

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0, u_i \rangle &= \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_t \,, u_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle u_1, u_i \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle + \dots + \alpha_t \langle u_t, u_i \rangle \\ &= \alpha_1 . 0 + \alpha_2 . 0 + \dots + \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle + \dots + \alpha_t . 0 = \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle \end{aligned}$$

ولكن

$$\langle u_i, u_i \rangle = \begin{cases} 0 & \forall j \neq i \\ \|u_i\|^2 & \forall j = i \end{cases}$$

لأن عناصر S متعامدة مثنى مثنى وذلك حسب الفرض.

إذاً: $\alpha_i \|u_i\|^2 = 0$

وبما أن $\|u_i\|^2 \neq 0$ لأن $u_i \neq 0$ ولأن $0 \notin S$ فإن هذا يعني $\alpha_i = 0$.

إذا جعلنا i تتحول من 1إلى t نجد أن العلاقة (1) تؤدي إلى

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

هذا يعني أن S مستقلة خطياً.

نتائج (3−1):

1− في الحالة الخاصة من المبرهنة السابقة نجد أن كل مجموعة متعامدة ومنظمة في فضاء ضرب داخلي هي مجموعة مستقلة خطياً.

2− إذا كان $(V, \langle , \rangle)$ فضاء ضرب داخلي وكان $\dim V = n$ وكانت $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$مجموعة جزئية منه لا تحوي الصفر فإنه حسب المبرهنة (4−1) ينتج:

أ− إذا كانت $n < r$ فإنS لن تكون متعامدة لأنها تكون مستقلة خطياً.

ب− إذا كانت $n = r$ وكانت S متعامدة فإنها تكون أساساً لـV.

3− إذا كانت $(V, \langle , \rangle)$ فضاء ضرب داخلي حيث $\dim V = n$ وكانت $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مجموعة متعامدة ومنظمة في V فإنها تكون أساساً لـV، لذلك إذا كان $u, v \in V$ فإن:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

ومنه:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

أي أن الضرب الداخلي هنا يصبح كالضرب القياسي على $\mathbb{C}^n$.

مثال (4−2):

1) إن المجموعة:

$$\{u_1 = (\cos\theta, -\sin\theta), u_2 = (\sin\theta, \cos\theta)\}$$

تشكل أساساًمتعامداً ومنظماً في الفضاء $\mathbb{R}^2$.

2) إن المجموعة:

$$\left\{u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), u_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2,1,-4), u_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,-2,1)\right\}$$

تشكل أساساً متعامداً ومنظماً للفضاء $\mathbb{R}^3$.

3) إن المتجهات:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1) \quad , v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,0,1) \quad , v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,1)$$

تشكل أساس متعامد ومنظم في فضاء الضرب الداخلي الاقليدي$\mathbb{R}^4$.

مثال (4−3):

لتكن:

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \sqrt{\frac{3}{2}}x \ , \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\} \subseteq \mathbb{C}[-1,1]$$

حيث الضرب الداخلي المعرف على $\mathbb{C}[-1,1]$ هو الضرب المعرف بالمثال (3−2).

سنبرهن الآن على أن S هي مجموعة متعامدة منظمة، وذلك لأن:

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2} x dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left[\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x\right)\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle \sqrt{\frac{3}{2}}x \ , \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{3\sqrt{15}}{4}\left(x^3 - \frac{1}{3}x\right) dx$$

$$= \left[\frac{3\sqrt{15}}{4}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^2\right)\right]_{-1}^{1} = 0$$

وبالحساب نجد أن:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\| = \left\|\sqrt{\frac{3}{2}}\ x\right\| = \left\|\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\| = 1$$

مثال (4−4):

في فضاء الدوال المركبة المستمرة على المجال [0,1] والمزودة بالضرب الداخلي:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).\overline{g(x)}\,.dx$$

لدينا المجموعة:

$$S = \{f_n \in V: f_n(x) = \cos 2\pi nx + i \sin 2\pi nx \quad , n \in \mathbb{N}\}$$

وهي مجموعة متعامدة منظمة (المثال (4−1) البند الثالث). لذلك فإن هذه المجموعة مستقلة خطياً وهي غير منتهية ولذلك فإن هذا الفضاء غير منتهي البعد.

مبرهنة(4−2):

لتكن $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مجموعة متعامدة لا تحوي الصفر في فضاء الضرب الداخلي $(V, \langle,\rangle)$ فوق الحقل F، وليكن u متجهاً من V يكتب على شكل تركيب خطي لعناصر المجموعة وفق العلاقة:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_j u_j + \cdots + \alpha_n u_n$$

عندئذ يكون:

$$\alpha_j = \frac{\langle u, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} \qquad , (j = 1,2, \dots, n)$$

البرهان:

لنحسب الضرب $\langle u, u_j\rangle$ آخذين بعين الاعتبار تعامد المتجهات $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\langle u, u_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i , u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle u_i, u_j\rangle$$
$$= \alpha_j \langle u_j, u_j\rangle$$

ومنه ينتج $\langle u, u_j\rangle = \alpha_j \|u_j\|^2$،وبما أن $u_j \neq 0$ فإن:

$$\alpha_j = \frac{\langle u, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} \qquad , (j = 1,2, \dots, n)$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (4−1):

تسمى الأعداد $\frac{\langle u,u_j\rangle}{\langle u_j,u_j\rangle}$ عادةً معاملات فوربيه للمتجه u بالنسبة للمتجهات $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

مثال(4−5):

لتكن:

$$S = \{u_1 = (0,1,1) , u_2(1,0,0), u_3(0,-2,2)\}$$

مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^3$. والمطلوب:

1− بين أن S هي أساس متعامد للفضاء $\mathbb{R}^3$.

2− اكتب المتجه $u = (3,4,-1)$ كتركيب خطي لعناصر S.

الحل:

1) نلاحظ أولاً أن المتجهات متعامدة لأن الضرب الداخلي القياسي لكل اثنين منها يساوي الصفر. كما أن $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ فهي تشكل أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$.

2) لدينا

$$u = \frac{\langle u, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} . u_1 + \frac{\langle u, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} . u_2 + \frac{\langle u, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle} . u_3$$

$$\langle u,u_1\rangle = 3 \quad , \quad \langle u,u_2\rangle = 3 \quad , \quad \langle u,u_3\rangle = -10$$
$$\langle u_1,u_1\rangle = 2 \quad , \quad \langle u_2,u_2\rangle = 1 \quad , \quad \langle u_3,u_3\rangle = 8$$

ومنه:

$$u = \frac{3}{2}u_1 + 3u_2 - \frac{5}{4}u_3$$

خوارزمية جرام – شميت في التعامد

Gram-Schmidt Orthogonalization

سنبين في هذه الفقرة أنه في أي فضاء ذي ضرب داخلي منتهي البعد يوجد أساس متعامد ومنظّم وذلك بمعرفة أساس ما فيه.

مبرهنة (4–3):

لنفرض أن $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ مجموعة متجها متعامدة من فضاء ذي الضرب الداخلي V، وليكن v أي متجه من V حيث $v \notin \langle S\rangle$ ولنعرف u_{m+1} كما يلي:

$$u_{m+1} = v - \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}.u_1 - \frac{\langle v,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}.u_2 - \cdots - \frac{\langle v,u_m\rangle}{\|u_m\|^2}.u_m$$

عندئذ المجموعة

$$\{u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}\}$$

هي مجموعة متعامدة أيضاً.

البرهان:

نبرهن أن u_{m+1} متعامدمع جميع u_i لكل $1 \le i \le m$، أي نثبت أن

$\langle u_{m+1}, u_i\rangle = 0$ لكل $1 \le i \le m$.

لدينا:

$$u_{m+1} = v - \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}.u_1 - \frac{\langle v,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}.u_2 - \cdots - \frac{\langle v,u_m\rangle}{\|u_m\|^2}.u_m$$

ومنها نجد أن:

$$\langle u_{m+1}, u_i \rangle = \langle v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} . u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} . u_2 - \cdots - \frac{\langle v, u_m \rangle}{\|u_m\|^2} . u_m , u_i \rangle$$
$$= \langle v, u_i \rangle - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} \langle u_k, u_i \rangle$$

ولكن:

$$\langle u_k, u_i \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad k \neq i \\ \langle u_i, u_i \rangle & ; \quad k = i \end{cases}$$

وبذلك ينتج لدينا من العلاقة الأخيرة:

$$\langle u_{m+1}, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} . \langle u_i, u_i \rangle = 0$$

وعليه فإن $\langle u_{m+1}, u_i \rangle = 0$ لكل $1 \leq i \leq m$، وبالتالي فإن:

$$\{u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}\}$$

مجموعة متعامدة.

مبرهنة(4−4):

إذا كان V فضاء ذا ضرب داخلي منتهي البعد، فإنV يحتوي على أساس متعامد.

البرهان:

سنبرهن العبارة باستخدام الاستقراء الرياضي على n.

إذا كان $n = 1$ فإنه من الواضح أن أي أساس $\{v\}$ للفضاء V يجب أن يكون متعامداً.

لنفرض أن المبرهنة صحيحة عندما $n = k$ وأن $\dim V = k + 1$ ولنفرض كذلك أن

$\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ أساس للفضاء V وأن $S = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \rangle$.

فإن $\dim S = k$ وباستخدام فرضية الاستقراء الرياضي يوجد أساس متعامد $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ للفضاء S.

وليكن $v \notin S$ ولنضع:

$$u_{k+1} = v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 - \cdots - \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} \cdot u_k$$

عندئذ باستخدام المبرهنة (4−3) نجد أن $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ مجموعة متعامدة، وبالتالي نجد أنها تشكل أساساً للفضاء V. ومنه $\dim V = k + 1$.

ملاحظة(4−2):

تذكر لنا المبرهنة(4−4) وجود أساس متعامد لأي فضاء ضرب داخلي منتهي البعد. وبالإضافة إلى ذلك فإن برهانها الذي يعتمد على المبرهنة (4−3) يزودنا بخوارزمية لإنشاء أساس متعامد من أي أساس معطى.

تسمى هذه الخوارزمية بخوارزمية جرام _شميدت(Gram _ Schmidt)

والتي نعطيها بالشكل التالي:

إذا كان V فضاء ذا ضرب داخلي منتهي البعد وليكن $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً لهذا الفضاء. عندئذ نحصل على الأساس المتعامد $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ للفضاء Vباتباع الخطوات التالية:

(1) $u_1 = v_1$

(2) $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1$

(3) $u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2$

$\vdots$

(n) $u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} \cdot u_{n-1}$

نستنتج مما سبق أن المتجهات $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ متعامدة، وبالتالي فهي مستقلة خطياً حسب المبرهنة(4−1) وبما أن $\dim V = n$ فالمتجهات $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ تشكل أساساً متعامداً للفضاء V.

بقي أن يكون النظيم لكل متجه في هذا الأساس يساوي الواحد،لذلك نأخذ المتجهات:

$$\left\{u'_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}\ , u'_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}\ , \dots , u'_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}\right\}$$

(حيث $\|u_i\| \neq 0\ ,\ 1 \leq i \leq n$) والأساس المتعامد المنظّم

.$\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$

ملاحظة (4−3):

إن جميع خطوات الخوارزمية السابقة مبررة وذلك بالاستعانة بالمبرهنة (4−3).

فمثلاً، لتبرير الخطوة (2) نلاحظ أن $v_2 \notin \langle u_1 \rangle$ وذلك لأن $\{v_1, v_2\}$ مجموعة مستقلة خطياً ولذا فإن المبرهنة (4−3) تضمن أن $\{u_1, u_2\}$ مجموعة متعامدة.

مثال (4−6):

استخدم خوارزمية جرام −شميدت لإيجاد أساس متعامد منظم للأساس:

$$\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)\}$$

في فضاء الضرب الاقليدي $\mathbb{R}^3$.

نضع أولاً: $u_1 = v_1 = (1,1,1)$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}\ . u_1$$

$$= (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

نتخلص من الكسور فنحصل على $u_2 = (1,1,-2)$

ثم نحسب:

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}\ . u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2}\ . u_2$$

$$= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{6}(1,1,-2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

نتخلص من الكسور فنحصل على $u_3 = (1,-1,0)$.

بقي أن نوجد نظيم كل متجه، فيكون:

$$\|u_1\| = \sqrt{3} \quad , \quad \|u_2\| = \sqrt{6} \qquad , \quad \|u_3\| = \sqrt{2}$$

وبالتالي يكون الأساس النظامي المتعامد هو:

$$\left\{u'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right), u'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$$

مثال(4−7):

ليكن $\mathcal{W}$ فضاءً جزئياً من $\mathbb{R}^5$ مولداً بالمجموعة

$$\{v_1 = (1,-1,0,1,0), v_2 = (0,-1,0,0,1), v_3 = (-1,-1,0,1,0)\}$$

والمطلوب: عين أساس متعامد منظم للفضاء $\mathcal{W}$ حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي.

الحل:

المتجهات $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطياً فهي اذاً أساس للفضاء الجزئي $\mathcal{W}$.

(1) $$u_1 = v_1 = (1,-1,0,1,0)$$

(2) $$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} . u_1 = (0,-1,0,0,1) - \frac{1}{3}(1,-1,0,1,0)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

نتخلص من الكسور فنحصل على $u_2 = (-1,-2,0,-1,3)$

(3) $$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} . u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} . u_2$$

$$= (-1,-1,0,1,0) - \frac{1}{3}(1,-1,0,1,0) - \frac{2}{15}(-1,-2,0,-1,3)$$

$$= \left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, 0, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

نتخلص من الكسور فنحصل على $u_3 = (-6,-2,0,4,-2)$.

بقي أن نوجد نظيم كل متجه فيكون:

$$\|u_1\| = \sqrt{3} \quad , \quad \|u_2\| = \sqrt{15} \qquad , \quad \|u_3\| = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

وبالتالي تكون عناصر الأساس المتعامد المنظم هي:

$$u'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1,0),$$

$$u'_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1,-2,0,-1,3),$$

$$u'_3 = \frac{1}{2\sqrt{15}}(-6,-2,0,4,-2) = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3,-1,0,2,-1)$$

ويكون الأساس المتعامد المنظم هو: $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$.

مثال (4–8):

ليكن $V = P_2$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي درجتها أصغر أو يساوي 2 مزوداً بالضرب الداخلي

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).\,g(x)dx$$

استخدم الأساس $B = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = 2x - 1, p_3(x) = 12x^2\}$

للفضاء وطريقة جرام شميدت لإيجاد الأساس النظامي المتعامدللفضاء V.

الحل:

$$u_1 = p_1 = 1$$

$$u_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\,.u_1$$

$$= 2x - 1 - \langle 2x-1,1\rangle.1 = 2x - 1$$

لنوجد

$$\langle 2x-1,1\rangle = \int_0^1 (2x-1)dx = [x^2 - x]_0^1 = 0$$

كما أن

$$\|u_2\|^2 = \langle 2x-1, 2x-1\rangle = \int_0^1 (2x-1)(2x-1)dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_0^1 = \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}$$

ومنه فإن:

$$\|u_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نضع الآن:

$$u_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle p_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2$$

$$= 12x^2 - \int_0^1 12x^2 dx - \frac{\int_0^1 (12x^2)(2x-1)dx}{\frac{1}{3}} \cdot (2x-1)$$

$$= 12x^2 - [4x^3]_0^1 - \frac{\int_0^1 (24x^3 - 12x^2)dx}{\frac{1}{3}} \cdot (2x-1)$$

$$= 12x^2 - 4 - 6.(2x-1)$$

$$= 12x^2 - 12x + 6 - 4 = 12x^2 - 12x + 2$$

بقي أن نوجد نظيم كل متجه فيكون:

$$\|u_1\| = 1 \quad , \quad \|u_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|u_3\|^2 = \langle 12x^2 - 12x + 2, 12x^2 - 12x + 2\rangle$$

$$= \int_0^1 (12x^2 - 12x + 2)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (144x^4 - 144x^3 + 24x^2 - 144x^3 + 144x^2 - 24x + 24x^2 - 24x + 4)dx$$

$$= \int_0^1 (144x^4 - 288x^3 + 192x^2 - 48x + 4)dx$$

$$= \left[\frac{144}{5}x^5 - \frac{288}{4}x^4 + \frac{192}{3}x^3 - \frac{48}{2}x^2 + 4x\right]_0^1$$

$$= \frac{144}{5} - 72 + 64 - 24 + 4 = \frac{4}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad \|u_3\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

وبالتالي تكون عناصر الأساس المتعامد المنظم هي:

$$u'_1 = 1$$
$$u'_2 = \sqrt{3}(2x-1)$$
$$u'_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(12x^2 - 12x + 2) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

ويكون الأساس المتعامد المنظم هو: $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$.

مثال (4−9):

أوجد أساس متعامد منظم للفضاء الجزئي من $\mathbb{C}^3$ المولد بالمتجهين:

$$v_1 = (1, i, i-1) \ , v_2 = (1, 1+i, 2i-1)$$

حيث إن الضرب الداخلي هو الضرب المعرف بالمثال (1−1).

الحل:

المتجهان مستقلان خطياً إذاً يشكلان أساساً لهذا الفضاء الجزئي

(1) $$u_1 = v_1 = (1, i, i-1)$$

(2) $$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} . u_1$$

$$= (1, 1+i, 2i-1) - \frac{5-2i}{4}(1, i, i-1)$$

$$= (1, 1+i, 2i-1) + \left(\frac{-5+2i}{4}, \frac{-2-5i}{4}, \frac{3-7i}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(-1+2i, 2-i, -1+i)$$

نتخلص من الكسر فنحصل على $u_2 = (-1+2i, 2-i, -1+i)$.

بقي أن نوجد $\|u_1\|$ و $\|u_2\|$ ويكون:

$$\|u_1\| = 2 \quad , \quad \|u_2\| = 2\sqrt{3}$$

وبالتالي يكون الأساس المتعامد المنظم هو:

$$\left\{u'_1 = \frac{1}{2}(1, i, i-1) \quad , \quad u'_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1+2i, 2-i, -1+i)\right\}$$

مبرهنة (4−5):

إذا كانت $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساس متعامد ومنظم لفضاء الضرب الداخلي$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ المنتهي البعد، وليكن $v \in V$ عندئذٍ

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i \ (1)$$

وإذا كان:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \quad , \quad w = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$$

فإن:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = X^T . \overline{Y} (2)$$

البرهان:

نلاحظ أولاً أن $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ حيث $1 \le i \le n$، وحسب المبرهنة (4−2) نجد أن:

$$\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \, , \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \rangle$$
$$= \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \ \langle u_i, u_j \rangle (3)$$

ولكن:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \ne j \end{cases}$$

وبذلك تصبح (3) كما يلي:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = X^T . \overline{Y}$$

حيث X و Y مصفوفتا عمود مركبات المتجهين v, w بالنسبة لهذا الاساس.

مبرهنة(4−6): (متراجحة بسل)

لتكن $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساساً متعامداً ومنظماً لفضاء الضرب الداخلي$(V, \langle\,,\rangle)$

المنتهي البعد، وليكن $v \in V$ و α_i معامل فورييه لـv بالنسبة لـu_i عندئذ فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \|v\|^2$$

البرهان:

نلاحظ أن لأن $\|u_i\| = 1$. وبما أن $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ من أجل $i \neq j$

فإننا نحصل على:

$$0 \leq \langle v - \sum c_k u_k \,, v - \sum c_k u_k\rangle$$

$$= \langle v, v\rangle + \langle v\,, -\sum c_k u_k\rangle + \langle -\sum c_k u_k \,, v\rangle + \langle -\sum c_k u_k \,\,, -\sum c_k u_k\rangle$$

$$= \langle v, v\rangle - 2\,\langle v\,, \sum c_k u_k\rangle + \sum {c_k}^2$$

$$= \langle v, v\rangle - \sum {c_k}^2$$

وهذا يعطينا

$$\sum_{k=1}^{n} {c_k}^2 \leq \|v\|^2$$

مثال (4−10):

في المثال (4−5) حقق متراجحة بسل.

لدينا في المثال (4−6):

$$u = \frac{3}{2}u_1 + 3u_2 - \frac{5}{4}u_3$$

$$u = (3,4,-1)$$

$$\sum_{k=1}^{3} {c_k}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (3)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} + 9 + \frac{25}{16}$$

$$= \frac{36+25}{16} + 9 = \frac{61}{16} + 9 = \frac{61+144}{16} = \frac{205}{16}$$

$$\|u\|^2 = 9 + 16 + 1 = 26$$

واضح أن:

$$\sum_{k=1}^{n} {c_k}^2 \leq \|u\|^2$$

(5–4) المتمم العمودي

The Orthogonal Complement

تعريف (5–1):

إذا كان $\mathcal{W}$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي $(V, \langle \, , \rangle)$.

فإن المتمم العمودي ل $\mathcal{W}$ الذي نرمز له بالرمز $\mathcal{W}^{\perp}$ هو مجموعة المتجهات الآتية:

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{ v \in V \quad : \langle v, w \rangle = 0 \quad , \forall w \in \mathcal{W} \}$$

مثال (5–1):

ليكن $V = \mathbb{R}^3$ وليكن $\mathcal{W} = span\,\{u = (3,-1,0)\,, v = (4,0,1)\}$ فضاءً جزئياً. لنوجد المتمم العمودي ل$\mathcal{W}$.

الحل:

إذا كان $w_1 = (x, y, z) \in \mathcal{W}^{\perp}$ فإننايجب أن نبحث عن كل المتجهات التي

تحقق المعادلتين:

$$\langle w, u \rangle = 3\text{x} - \text{y} = 0$$

$$\langle w, v \rangle = 4x + z = 0$$

وبحل هذا النظام نجد النظام المكافئ:

$$\left.\begin{matrix} 3x - 4 = 0 \\ 4y + 3z = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow w_1 = (-1, -3, 4)$$

ومنه فإن $\{w_1\}$ أساس للمتمم العمودي ل$\mathcal{W}$ أي $\{w_1\}$ أساس $\mathcal{W}^{\perp}$. إذاً

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{(x, y, z) \in V : -x - 3y + 4z = 0\}$$

مثال (5−2):

بفرض أن $\mathcal{W} = span\,\{w = (0,1,-2,5)\}$ في $\mathbb{R}^4$ ، أوجد أساساً للمتمم العمودي $\mathcal{W}^{\perp}$لـ$\mathcal{W}$.

الحل:

نبحث عن جميع المتجهات (x,y,z,t) في $\mathbb{R}^4$ بحيث تكون:

$$\langle (x,y,z,t)\,,(0,1,-2,5)\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow\ \ 0x + y - 2z + 5t = 0$$

وبالحل نجد أن المتغيرات الحرة هي x,z,t.

نضع $x = 1\,, y = z = t = 0$ ومنه الحل $w_1 = (1,0,0,0)$

ونضع $x = 0$،$z = 1$، $t = 1$ ومنه الحل $w_2 = (0,2,1,0)$

ثم نضع $x = z = 0$ ، $t = 1$

فنحصل على الحل $w_3 = (0,-5,0,1)$، ومنه فإن المتجهات $\{w_1, w_2, w_3\}$ تشكل أساساً لفضاء الحل للمعادلة وبالتالي أساساً لـ$\mathcal{W}^{\perp}$.

مبرهنة(5−1):

بفرض أن $(V,\langle\,,\rangle)$ فضاء ضرب داخلي منتهي البعد ولنفرض أن $\mathcal{W}$ فضاء جزئي من V فإن:

1) $\mathcal{W}^{\perp}$ فضاء جزئي من V.

2) $V = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$

3) إذا كان $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ فضاءين جزئيين من V وكان $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ فإن ${\mathcal{W}_1}^{\perp} \subseteq {\mathcal{W}_2}^{\perp}$

4) $\mathcal{W}^{\perp} = \text{span}\,(\mathcal{W})^{\perp}$

5) ${\mathcal{W}^{\perp}}^{\perp} = \mathcal{W}$

البرهان:

1) من الواضح أن $0 \in \mathcal{W}^{\perp}$. ليكن $u, v \in \mathcal{W}^{\perp}$.عندئذ من أجل أي $\alpha, \beta \in K$وأي $w \in \mathcal{W}$ يكون:

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle = \alpha . 0 + \beta . 0 = 0$$

وبذلك يكون $\alpha u + \beta v \in \mathcal{W}^{\perp}$. وبالتالي يكون $\mathcal{W}^{\perp}$ فضاءً جزئياً من V.

2) حسب المبرهنة (4−5) فإنه يوجد أساس متعامد ومنظم $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ للفضاء

$\mathcal{W}$ ولنتمم هذا الأساس إلى أساس متعامد ومنظم لـV.

ليكن

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$$

بما أن S متعامد ومنظم فإن:

$$u_{k+1}, \dots, u_n \in \mathcal{W}^{\perp}$$

ومنه:

$$\forall v \in V \Longrightarrow v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$$

حيث $a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \in \mathcal{W}$ و $a_{k+1} u_{k+1} + \cdots + a_n u_n \in \mathcal{W}^{\perp}$

ينتج من ذلك أن $V = \mathcal{W} + \mathcal{W}^{\perp}$، ومن جهة أخرى فإن $w \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp}$.

إذاً $\langle w, w \rangle = 0$وهذا يؤدي إلى أن $w = 0$، وبالتالي $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = 0$، ومن خلال ما سبق ومن تحقق الشرطين $V = \mathcal{W} + \mathcal{W}^{\perp}$ و $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = 0$ نجد بأن $V = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$.

3) ليكن $u \in \mathcal{W}_2{}^{\perp}$.إذاً $\langle u, v \rangle = 0$ من أجل كل $v \in \mathcal{W}_2$،وبما أن $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$، إذاً $\langle u, v \rangle = 0$ من أجل كل $v \in \mathcal{W}_1$،وبذلك يكون $u \in \mathcal{W}_1{}^{\perp}$، وهذا يقودنا إلى أن $\mathcal{W}_1{}^{\perp} \subseteq \mathcal{W}_2{}^{\perp}$.

4) بما أن $\mathcal{W} \subseteq span(\mathcal{W})$ فإن $span(\mathcal{W})^{\perp} \subseteq \mathcal{W}^{\perp}$ (حسب البند السابق)

ولنفرض أن $u \in \mathcal{W}^{\perp}$ وأن $v \subseteq span(\mathcal{W})$. إذا توجد $w_1, w_2, \dots, w_k$ في $\mathcal{W}$، بحيث إن

$$v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$$

الآن:

$$\langle u, v\rangle = \langle u, \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k\rangle = \alpha_1\langle u, w_1\rangle + \cdots + \alpha_k\langle u, w_k\rangle$$
$$= \alpha_1 . 0 + \cdots + \alpha_k . 0 = 0$$

أي أن $u \subseteq span(\mathcal{W})^{\perp}$ ينتج من ذلك أن $\mathcal{W}^{\perp} \subseteq span(\mathcal{W})^{\perp}$، ومن الاحتواءينالسابقين ينتج أن $\mathcal{W}^{\perp} = \text{span}\,(\mathcal{W})^{\perp}$.

5) أ) إن $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}^{\perp\perp}$ وذلك لأنه إذا كان $u \in \mathcal{W}$ فإن $\langle u, v\rangle = 0$ من أجل كل $v \in \mathcal{W}^{\perp}$ وبالتالي $u \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$.

ب) حسب البند 2 السابق لدينا $V = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$ و $V = \mathcal{W}^{\perp} \oplus \mathcal{W}^{\perp\perp}$ وبالتالي فإن $\dim \mathcal{W}^{\perp\perp} = \dim V - \dim \mathcal{W}^{\perp}$ و $\dim \mathcal{W} = \dim V - \dim \mathcal{W}^{\perp}$ ومن هذا ينتج أن $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}^{\perp\perp}$، ولكن $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}^{\perp\perp}$ (حسب (أ)) إذاً $\mathcal{W}^{\perp\perp} = \mathcal{W}$. وهو المطلوب.

ملاحظة (5−1):

إذا كان $(V, \langle\,,\rangle)$ فضاء ضرب داخلي فإن $\{0\}^{\perp} = V$ و $\{V\}^{\perp} = 0$ (علل السبب).

إذا كان $\mathcal{W}$ فضاءً جزئياً من $(V, \langle\,,\rangle)$، فضاء ضرب داخلي وجدنا حسب المبرهنة (5−1)(البند2) أن $V = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$ إذاً يوجد $w \in \mathcal{W}$ و $w' \in \mathcal{W}^{\perp}$، بحيث إن $v = w + w'$ يكتب بصورة وحيدة. لنعرف التعريف الآتي.

تعريف (5−2):

إن التطبيق $E_w: V \longrightarrow V$ المعرف بواسطة $E_w(v) = w$ يسمى تطبيق الإسقاط المتعامد لـV على $\mathcal{W}$. ولكون $Im(E_w) = \mathcal{W}$ و $\ker(E_w) = \mathcal{W}^{\perp}$.

مثال (5−3):

ليكن $\mathcal{W}$ محور Z في $\mathbb{R}^3$ أي $\mathcal{W} = \{(0,0,c): \ c \in R\}$

والمطلوب: ما هو $\mathcal{W}^{\perp}$ ؟ ثم أوجد تطبيق الإسقاطE_w.

الحل:

إن$\mathcal{W}^{\perp}$ هو المستوي XoY أي أن:

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{(a,b,0): \ a,b \in R\}$$

أما تطبيق الإسقاطE_w لـ$\mathbb{R}^3$ على $\mathcal{W}$ فيعطى بالعلاقة$E_w(x,y,z) = (0,0,z)$

(6−4) مصفوفة الضرب الداخلي
Matrix of inner product

تعريف (6−1):

ليكن $(V, \langle\,,\rangle)$ فضاء ذا ضرب داخلي، وليكن $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساساً لـV.

نعرف المصفوفة $A = [a_{ij}]$ بواسطة $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \dots & \dots \ \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix}$$

والتي تسمى مصفوفة الضرب الداخلي.

ملاحظة (6−1):

نلاحظ أن المصفوفة A متناظرة لأن $\langle e_i, e_j \rangle = \langle e_j, e_i \rangle$ من أجل أي متجهين e_i, e_jمن الأساس B وهي تعتمد على أساس الضرب الداخلي وعلى الأساس B.

مثال (1–6):

ليكن الأساس $B = \{e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,0,0)\}$ لـ $\mathbb{R}^3$.

أوجد المصفوفة التي تمثل الضرب الداخلي المعتاد على $\mathbb{R}^3$ بالنسبة للأساس B.

الحل:

نحسب: $\langle e_1, e_1\rangle = 1 + 1 + 1 = 3$ ، $\langle e_1, e_2\rangle = 1 + 1 + 1.0 = 2$

$$\langle e_1, e_3\rangle = 1 + 1.0 + 1.0 = 1$$

$$\langle e_2, e_1\rangle = 2\ , \quad \langle e_2, e_2\rangle = 2 \quad , \langle e_2, e_3\rangle = 1$$

$$\langle e_3, e_1\rangle = 1\ , \quad \langle e_3, e_2\rangle = 1 \quad , \langle e_3, e_3\rangle = 1$$

ومنه:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال(2–6):

ليكن الأساس $B = \{v_1 = (1,-1), v_2 = (2,5)\}$ لـ $\mathbb{R}^2$.

أوجد المصفوفة A_1 التي تمثل الضرب الداخلي القياسي على $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للأساس B.

الحل:

نحسب: $\langle v_1, v_1\rangle = 1 + 1 = 2$ ، $\langle v_1, v_2\rangle = -3$

$$\langle v_2, v_1\rangle = -3\ , \quad \langle v_2, v_2\rangle = 29$$

ومنه:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 29 \end{bmatrix}$$

مثال(3–6):

ليكن لدينا الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^2$ والمعرف بالشكل الآتي:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

حيث $u = (x_1, x_2) \quad , v = (y_1, y_2)$

والمطلوب: أوجد المصفوفة A التي تمثل الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للأساس المعتاد$B = \{e_1 = (1,0)\ ,\ e_2 = (0,1)\}$.

الحل:

نحسب: $\langle e_1, e_1\rangle = \langle (1,0),(1,0)\rangle = 1 - 0 + 0 = 1$

$$\langle e_1, e_2\rangle = \langle (1,0),(0,1)\rangle = 0 - 1 - 0 + 0 = -1$$
$$\langle e_2, e_1\rangle = \langle (0,1),(1,0)\rangle = -1$$
$$\langle e_2, e_2\rangle = \langle (0,1),(0,1)\rangle = 0 - 0 - 0 + 3 = 3$$

ومنه فإن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال(6−4):

أوجد المصفوفة A التي تمثل الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^2$ السابق بالنسبة للأساس

$$B = \{v_1 = (1,-1)\ , v_2 = (2,5)\}$$

الحل:

$$\langle v_1, v_1\rangle = \langle (1,-1),(1,-1)\rangle = 1 + 1 + 1 + 3 = 6$$
$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle (1,-11),(2,5)\rangle = 2 - 5 + 2 - 15 = -16$$
$$\langle v_2, v_1\rangle = \langle (2,5),(1,-1)\rangle = 2 + 2 - 5 - 15 = -16$$
$$\langle v_2, v_2\rangle = \langle (2,5),(2,5)\rangle = 4 - 10 - 10 + 75 = 59$$

ومنه المصفوفة التي تمثل الضرب الداخلي بالنسبة للأساس B هي:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -16 \\ -16 & 59 \end{bmatrix}$$

ملاحظة(6−2):

إذا قارنا بين المثال(6−2) والمثال (6−4) يتبين لنا أن المصفوفة الممثلة للضرب الداخلي تعتمد على الأساس وعلى الضرب الداخلي على V.

مبرهنة(6−1):

إذا كانت A المصفوفة الممثلة لضرب داخلي على V بالنسبة إلى الأساس

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ فإن:

$$\langle u, v\rangle = [u]^T . A . [v]$$

من أجل أي متجهين $u, v \in V$ ، حيث $[u], [v]$ يرمزان على الترتيب للمتجهين الاحداثيين(العموديين) لـ u و v بالنسبة للأساس B.

البرهان:

لنفرض أن $A = (k_{ij})$ إذاً $k_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ ولنفترض أيضاً أن:

$$u = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \quad , \quad v = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$$

ومنه:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j \langle e_i, e_j\rangle \quad \dots . (1)$$

ولدينا من جهة أخرى أن

$$[u]^T . A . [v] = (a_1 \quad a_2 \dots \quad a_n)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots \ \dots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} \dots & k_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_j\, k_{ij} \qquad \dots \quad (2)$$

وبما أن $k_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ إذاً نستنتج من (1) و (2) أن:

$$\langle u, v\rangle = [u]^T . A . [v]$$

وهو المطلوب.

مثال (6–5):

ليكن $V = P_2$ الفضاء المتجهي لكثيرات الحدود التي درجتها أصغر أو تساوي 2.والضرب الداخلي المعرّف بالشكل:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$$

والمطلوب:

1) أوجد $\langle f,g\rangle$ حيث $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

2) أوجد المصفوفة A للضرب الداخلي بالنسبة للأساس $B = \{1, x, x^2\}$ في V.

3) حقق المبرهنة (6–1) السابقة أي $\langle f,g\rangle = [f]^T.A.[g]$ بالنسبة للأساس B.

الحل:

1) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1}(\mathrm{x}-2)(x^2-2x+3)\mathrm{dx}$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3 - 2x^2 + 3x - 2x^2 + 4x - 6)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x62 - 6x\right]_{-1}^{1} = -\frac{44}{3}$$

2) نستخدم هنا حقيقة أنه إذا كانت $r + s = n$، فإن:

$$\langle X^s, X^r\rangle \int_{-1}^{1} X^n dx = \left[\frac{X^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & if \quad \text{زوجية } n \\ 0 & if \quad \text{فردية } n \end{cases}$$

وبالتالي:

$$\langle 1,1\rangle = 2 \quad , \langle 1,X\rangle = \int_{-1}^{1} XdX = \left[\frac{X^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle 1,X^2\rangle = \int_{-1}^{1} X^2 dX = \left[\frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle X,1\rangle = 0 \ \ ,\langle X,X\rangle = \int_{-1}^{1} X^2 dX = \left[\frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle X,X^2\rangle = \int_{-1}^{1} X^3 dX = \left[\frac{X^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle X^2,1\rangle = \frac{2}{3} \ \ ,\langle X^2,X\rangle = 0 \ \ ,\langle X^2,X^2\rangle = \left[\frac{X^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

وبذلك تكون المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

3) لدينا $[f]^T = (-2,1,0)$ ، $[g]^T = (3,-2,1)$ بالنسبة للأساس المعطى.إذاً

$$[f]^T.A.[g] = (-2,1,0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{44}{3} = \langle f,g\rangle$$

والمبرهنة محققة.

(7-4) المصفوفة المعرفة - الموجبة وبعض خواصها

تعريف (7-1):

لتكن A مصفوفة مربعة نقول عن المصفوفة A أنها معرفة موجبة إذا كانت A متناظرة وكان $X^T.A.X > 0$ من أجل أي متجه غير صفري X.

مبرهنة (7-1):

لتكن A مصفوفة تمثل ضرباً داخلياً على V بالنسبة لأي أساس $B=\{e_i\}$ عندها

فإن A مصفوفة معرفة موجبة.

الإثبات:

إن A مصفوفة متناظرة لأن $<e_i , e_j> = <e_j , e_i>$ وليكن X متجه غير صفري

في $\mathbb{R}^n$ إذاً $X = [u]$ من أجل متجه غير صفري $u \in V$ وحسب المبرهنة (6-1)

يكون لدينا: $X^T.A.X = [u]^T.A.X$ ومنه تكون A - معرفة - وموجبة.

مبرهنة (7-2):

لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n معرفة – موجبة وليكن

$< u , v >_A = uT.A.v$ من أجل أي متجهين $u, v \in \mathbb{R}^n$ عندئذ يكون

$< \ , \ >_A$ ضرباً داخلياً على $\mathbb{R}^n$.

البرهان:

من أجل تبسيط الكتابة نحذف الدليل الشكلي A من الرمز $< \ , \ >_A$

1. من أجل أي متجهات $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^n$ يكون

$$< u_1+u_2, v > = (u_1+u_2)^T.A.v = (u_1^T+u_2^T).A.v$$

$$= u^T_1.A.v + u^T_2.A.v = < u_1, v > + < u_2, v >$$

لدينا من أجل أي عدد سلمي k وأي متجهين u, v :

$<ku, v> = (k\,u)^T.A.\,v = k\,.<u, v>$

وبالتالي الشرط الأول من الشروط الضرب الداخلي محقق

2. بما أن $u^T.A.\,v$ عدد سلمي إذاً: $(u^T.A.v)^T = u^T.A.\,v$

ولدينا أيضاً $A^T = A$ لأن A متناظرة ، لذلك

$< u, v> = u^T.A.\,v = (u^T.A.\,v) = v^T.A^T.(u^T)^T = v^T.A.u = <v,u>$

وهذا يعني الشرط الثاني محقق

3. بما أن A معرفة موجبة إذاً: $X^T.A.X > 0$ من أجل أي متجه غير صفري

$X \in \mathbb{R}^n$ وبالتالي لدينا: $<v, v> = v^T.A.\,v > 0$ من أجل أي متجه غير صفري v. وبالتالي الشرط الثالث محقق أيضاً.

بعض خواص المصفوفة المعرفة - الموجبة:

1- بفرض أن A,B مصفوفتان معرفتان – موجبتان عندئذ إن $A+B$ مصفوفة معرفة- موجبة.

البرهان:

بما أن A,B متناظرتان إذاً : $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$ وبالتالي $A+B$ مصفوفة متناظرة. ولدينا أيضاً من أجل أي متجه غير صفري X :

$$X^T.(A+B).X = X^T.A.X + X^T.B.X > 0$$

وهذا يعني أن المصفوفة $A+B$ معرفة – موجبة.

2- إذا كانت المصفوفة A معرفة – موجبة وكان $k > 0$ عدداً سلمياً فإن $k.A$ مصفوفة معرفة – موجبة أيضاً.

البرهان:

إن $(kA)^T = kA^T = kA$ وبذلك تكون المصفوفة kA متناظرة.

ومن ناحية ثانية لدينا : من أجل أي متجه غير صفري X فإن $X^T.A.X > 0$

وبالتالي $X^T(kA).X = k(X^T.A.X) > 0$ إذاً المصفوفة $k.A$ معرفة – موجبة.

3- بفرض أن P مصفوفة حقيقية غير شاذة عندها فإن $P^T.P$ مصفوفة معرفة – موجبة.

البرهان:

لدينا فإن $(P^T.P)^T = P^T.(P^T)^T = P^T.P$ إذاً $P^T.P$ متناظرة

ولنفترض أن X متجه غير صفري في $\mathbb{R}^n$ بما أن P غير شاذة فإن PX يكون غير صفري أيضاً وبالتالي :

$<PX,PX>$ (الضرب الداخلي العادي في $\mathbb{R}^n$) وبالتالي:

$X^T.(P^T.P).X = (PX)^T.(PX) = <PX,PX> > 0$ وبذلك تكون $P^T.P$: معرفة - موجبة.

تمارين محلولة

1− ليكن $V=\mathbb{R}^2$ فضاءً متجهياً. عندئذ بيّن أن التطبيق

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

حيث $u=(x_1,x_2)\,,v=(y_1,y_2)$ هو ضرب داخلي على $\mathbb{R}^2$.

الحل:

لنتأكد من تحقق الشروط الثلاثة الواردة في تعريف الضرب الداخلي وذلك بوضع $w=(z_1,z_2)$ نجد أن:

(1)

$$au+bw = a(x_1,x_2)+b(z_1,z_2) = (ax_1+bz_1, ax_2+bz_2)$$

وبذلك يكون:

$$\langle au+bw,v\rangle = \langle (ax_1+bz_1, ax_2+bz_2),(y_1,y_2)\rangle$$
$$= (ax_1+bz_1)y_1 - (ax_1+bz_1)y_2 - (ax_2+bz_2)y_1 + 2(ax_2+bz_2)y_2$$
$$= a(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) + b(z_1y_1 - z_1y_2 - z_2y_1 + 2z_2y_2)$$
$$= a\langle u,v\rangle + b\langle w,v\rangle$$

ينتج تحقق الشرط الأول (شرط الخطية).

(2) $$\langle v,u\rangle = y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_2x_2$$
$$= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 = \langle u,v\rangle$$

(3) و أخيراً يكون لدينا:

$$\langle u,u\rangle = {x_1}^2 - x_1x_2 + x_2x_1 + 2{x_2}^2 = {x_1}^2 - 2x_1x_2 + 2{x_2}^2$$
$${x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 + {x_2}^2 = (x_1-x_2)^2 + {x_2}^2 > 0$$

ومن (1) و(2) و(3) ينتج أن $\langle u,v\rangle$ هو ضرب داخلي على $\mathbb{R}^2$.

2−

أ) بين أن $\langle u,v\rangle = x_1y_1x_2y_2$ ليس ضرباً داخلياً على $\mathbb{R}^2$،حيث $u=(x_1,x_2)\,,v=(y_1,y_2)$.

ب) بين أن: $\langle u,v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ ليس ضرباً داخلياً على $\mathbb{R}^3$، حيث $u = (x_1, x_2, x_3)\ , v = (y_1, y_2, y_3)$.

الحل:

أ) إذا كان $k = 3$, $u = (1,2)\ , v = (2,2)$، فإن $ku = (3,6)$، ويكون لدينا:

$$\langle u,v\rangle = 1.2 + 2.2 = 6$$
$$\langle ku,v\rangle = 3.2.6.2 = 144$$
$$k\langle u,v\rangle = 3.6 = 18$$
$$\Longrightarrow \langle ku,v\rangle \neq k\langle u,v\rangle$$

وهذا يخالف الشرط (1).

ب) ليكن $u = (4,3,5) \in \mathbb{R}^3$. عندئذ:

$$\langle u,u\rangle = 4.4 + 3.3 - 5.5 = 25 - 25 = 0$$

وهذا خلاف الشرط الثالث.

3- ليكن $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ فضاء المتجهات المؤلفة من جميع المصفوفات من الشكل $m \times n$، ولنعرّف الدالة $< \ , \ >$ كما يلي:

$$\langle A,B\rangle = tr(B^T.A)$$

(حيث $tr(A)$ هو أثر المصفوفة A). والمطلوب أثبت أن $< \ , \ >$ هي دالة ضرب داخلي.

الحل:

(1) اعتماداً على خواص أثر مصفوفة يكون لدينا:

$$\langle A_1 + A_2, B\rangle = tr\big(B^T.(A_1 + A_2)\big) = tr(B^T.A_1) + tr(B^T.A_2)$$
$$= \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle$$

وأيضاً:

$$\langle \alpha A, B\rangle = tr\big(B^T.(\alpha A)\big) = tr\big(\alpha(B^T.A)\big) = \alpha\ tr(B^T.A) = \alpha\langle A,B\rangle$$

(2)

واعتماداً على أن $tr(A) = tr(A^T)$ يكون لدينا

$$\langle A,B\rangle = tr(B^T.A) = tr[(B^T.A)^T]$$
$$= tr[(A^T.B^{TT})] = tr(A^T.B) = \langle B,A\rangle$$

(3)

لتكن $A = [a_{ij}]$ وليكن $A^T = [b_{ij}]$، وبذلك يكون $b_{ij} = a_{ji}$، ولتكن

$$A^T.A = [c_{ij}]$$

إذاً:

$$\langle A,A\rangle = tr(A^T.A) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} {a_{ji}}^2$$

وبالتالي:

$$tr(A^T.A) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {a_{ji}}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} {a_{ij}}^2$$

4− ليكن V فضاء الدوال المستمرة على المجال [0,1]. عندئذ بين أن العلاقة

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad ,\forall f,g \in V$$

تعرف فضاء ضرب داخلي على V.

الحل:

لنفرض أن $f,g,h \in V$ و أن $\alpha \in \mathbb{R}$ عندئذٍ:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \quad (1)$$

$$\langle f+g,h\rangle = \int_0^1 \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,\,dx \quad (2)$$

$$= \int_0^1 f(x).h(x)\,\,dx + \int_0^1 g(x).h(x)\,\,dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$$

(3) $\langle \alpha f, g\rangle = \int_0^1 \big(\alpha f(x)\big) g(x)\, dx \ = \alpha \int_0^1 f(x)g(x)\, dx = \alpha\langle f, g\rangle$

(4) بما أن f مستمرة على المجال $[0,1]$،فإن$0 \geq \big(f(x)\big)^2$ لكل

$x \in [0,1]$ ولهذا فإن$0 \geq \langle f, f\rangle$

(5) $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

وبالتالي فإن الفضاء $(V, \langle\,,\rangle)$ هو فضاء ضرب داخلي.

5− إذا كانت

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad , \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$.

عندئذ بين فيما إذا كانت الدالة$\langle p(x), q(x)\rangle = a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2$

هي دالة ضرب داخلي، أم لا ؟

الحل:

إذا كان $f(x) = 4 + 5x + 3x^2$ من P_2، فإن:

$$\langle f, f\rangle = 4.4 - 5.5 + 3.3$$
$$= 25 - 25 = 0$$

بينما $f \neq 0$،وبالتالي فإن الدالة السابقة ليست دالة ضرب داخلي.

6− لتكن المتجهات:

$$v_1 = 1 \quad , \quad v_2 = x - \frac{1}{2} \quad , \quad v_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

من الفضاء P_2 فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو تساوي 2 والمعرف عليها الضرب الداخلي بالشكل:

$$\langle p(t), g(t)\rangle = \int_0^1 p(t)g(t)\, dx$$

والمطلوب:

1) أثبت أن المتجهات السابقة متعامدة.

2) احسب معاملات فورييه للمتجه $u = 4x^2 - 6x + 10$ بالنسبة لهذه المتجهات.

الحل:

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle 1, x-\frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\Big|_0^1 = 0$$

$$\langle v_1, v_3\rangle = \langle 1, x^2-x+\frac{1}{6}\rangle = \int_0^1 x^2-x+\frac{1}{6}\ \ dx$$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x\Big|_0^1 = 0$$

$$\langle v_2, v_3\rangle = \langle x-\frac{1}{2}, x^2-x+\frac{1}{6}\rangle = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\ \ dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3-x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)dx$$

$$= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}\Big|_0^1 = 0$$

وهذا يعني أن المتجهات متعامدة.

إن المتجهات المتعامدة السابقة تشكل أساساً للفضاء P_2، وإن:

$$\langle u, v_1\rangle = \int_0^1 4x^2-6x+10\ dx = \frac{50}{6}$$

$$\langle u, v_2\rangle = \int_0^1 (4x^2-6x+10)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ dx = -\frac{1}{6}$$

$$\langle u, v_3\rangle = \int_0^1 (4x^2-6x+10)\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\ dx = \frac{2}{90}$$

كذلك فإن:

$$\langle v_1,v_1\rangle=\int_0^1 dx=1$$

$$\langle v_2,v_2\rangle=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{12}$$

$$\langle v_3,v_3\rangle=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=\frac{1}{180}$$

$$\alpha_1=\frac{\langle u,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}=\frac{50}{6}\quad,\quad\alpha_2=\frac{\langle u,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}=-2$$

$$\alpha_3=\frac{\langle u,v_3\rangle}{\langle v_3,v_3\rangle}=\frac{\frac{2}{90}}{\frac{1}{180}}=4$$

وهي عبارة عن أمثال فورييه للمتجه u وبالتالي فإن:

$$u=\frac{50}{6}v_1-2v_2+4v_3$$

7− اكتب المتجه $u(2,1,-5)$ كتركيب خطي لمتجهات المجموعة

$$S=\{v_1=(1,1,1),v_2=(-2,1,1),v_3=(0,-1,1)\}$$

الحل:

نلاحظ أن المتجهات في S هي متجهات متعامدة لأن الضرب الداخلي القياسي لكل اثنين منها يساوي الصفر. كما أن $\dim\mathbb{R}^3=3$ فهي تشكل أساساً لهذا الفضاء ويكون لدينا:

$$u=\frac{\langle u,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1+\frac{\langle u,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}v_2+\frac{\langle u,v_3\rangle}{\langle v_3,v_3\rangle}v_3$$

و

$$\langle u,v_1\rangle=-2\quad,\quad\langle u,v_2\rangle=-8\quad,\quad\langle u,v_3\rangle=-6$$
$$\langle v_1,v_1\rangle=1\quad,\quad\langle v_2,v_2\rangle=6\quad,\quad\langle v_3,v_3\rangle=2$$

ومنه:

$$u = -2v_1 - \frac{4}{3}v_2 - 3v_3$$

8– بيّن في أي ربع تقع الزاوية θ بين المتجهين $u(4,0)$ و $v(-1,2)$ في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^2$.

الحل:

نحسب $\|v\|^2 = 1 + 4 = 5 \quad , \quad \|u\|^2 = 16 + 0 = 16$

$$\langle u, v\rangle = -4 + 0 = -4$$

ومنه:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|} = \frac{-4}{4\sqrt{5}}$$

وبما أن $\cos\theta$ سالب، فإن θ تقع في الربع الثاني.

9– أوجد $\cos\theta$ من أجل الزاوية θ بين المتجهين $u(4,0)$ و $v(-1,2)$ في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^2$، حيث يعرف الضربالداخلي كما في الشكل:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

الحل:

نحسب $\|v\|^2 = 1 + 2 + 2 + 12 = 17 \quad , \quad \|u\|^2 = 16$

$$\langle u, v\rangle = -4 - 8 - 0 + 0 = -12$$

ومنه:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|} = \frac{-12}{4\sqrt{17}} = -\frac{3}{\sqrt{17}}$$

10– أوجد $\cos\theta$ من أجل الزاوية θ بين المتجهين:

$$f(x) = 3x - 4 \quad \text{و} \quad g(x) = -3x^2$$

في الفضاء المتجهي V لكثيرات الحدود بالضرب الداخلي

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x).dx.$$

الحل:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 (-9x^3+12x^2).dx =$$

$$= \left[-\frac{9}{4}x^4+4x^3\right]_0^1 = -\frac{9}{4}+\frac{4}{1} = -\frac{9}{4}+\frac{16}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_0^1 (9x^2-24x+16)dx$$

$$= [3x^3-12x^2+16x]_0^1 = +7$$

$$\Longrightarrow \|f\| = \sqrt{7}$$

$$\|g\|^2 = \langle g,g\rangle = \int_0^1 9x^4dx = \left[\frac{9}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{9}{5}$$

$$\Longrightarrow \|g\| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

ومنه:

$$\cos\theta = \frac{\langle f,g\rangle}{\|f\|.\|g\|} = \frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{7}.\frac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{7\sqrt{5}}{4\sqrt{7}.3} = \frac{7\sqrt{5}}{12\sqrt{7}}$$

$$= \frac{\sqrt{35}}{12}$$

11− أوجد $\cos\theta$ من أجل الزاوية θ بين:

$$B = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

في الفضاء المتجهي للمصفوفات $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$، حيث يعرف الضرب الداخلي كما في المثال (3−3)، أي $\langle A,B\rangle = tr\,(B^t.A)$.

الحل:

$$\langle A,B\rangle = tr\,(B^t.A) = tr\left(\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\begin{bmatrix}5 & -4\\ 9 & -3\end{bmatrix} = +2$$

$$\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = tr\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix}10 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix} = 15$$

$$\|A\| = \sqrt{15}$$

$$\|B\|^2 = \langle B, B\rangle = tr\left(\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix}5 & 6\\6 & 9\end{bmatrix} = 14$$

$$\|B\| = \sqrt{14}$$

إذاً:

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{15}.\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{210}}$$

12−ليكن $V = \mathbb{C}^2$ وليكن الضرب الداخلي هو الضرب الداخلي القياسي في $\mathbb{C}^2$، أي $\langle u, v\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$

وبفرض أن $u = (1-i, 2+3i)\;,\; v(2-5i, 3-i)$، المطلوب:

1) أوجد $\langle u, v\rangle$ ، $\langle v, u\rangle$ ، $\|u\|$ ، $\|v\|$. ثم أوجد $d(u, v)$ المسافة بين المتجهين.

2) أوجد معامل فورييه C للمسقط $c\,w$ للمتجه $v' = (3+4i, 2-3i)$ على طول $w = (5+i, 2i)$ في $\mathbb{C}^2$.

الحل:

(1)

$$\langle u, v\rangle = (1-i)\overline{(2-5i)} + (2+3i)\overline{(3-i)}$$
$$= (1-i)(2+5i) + (2+3i)(3+i) = 10 + 14i$$
$$\langle v, u\rangle = (2-5i)\overline{(1-i)} + (3-i)\overline{(2+3i)}$$
$$= (2-5i)(1+i) + (3-i)(2-3i) = 10 - 14i$$

وكما هو متوقع وحسب تعريف الضرب الداخلي فإن $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$.

من أجل حساب $\|u\|$ نعلم أن $Z.\bar{Z} = a^2 + b^2$ عندما $Z = a + bi$

لذلك نستخدم

$$\|u\|^2 = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle = Z_1.\overline{Z_1} + \cdots + Z_n.\overline{Z_n}$$

حيث $u = (Z_1, \ldots, Z_n)$ وفي حالتنا نحسب:

$$\|u\|^2 = 1+1+4+9 = 15 \Longrightarrow \|u\| = \sqrt{15}$$

وكذلك

$$\|v\|^2 = 4+25+9+1 = 39 \Longrightarrow \|v\| = \sqrt{39}$$

نعلم أن $d(u,v) = \|u-v\|$ ، ولنوجد أولاً

$$u - v = (1-4i, -1+4i)$$

ومنه$\|u-v\|^2 = 1+16+1+16 = 34$

وبالتالي: $d(u,v) = \sqrt{34}$.

(2) تذكر أن$c = \frac{\langle v', w\rangle}{\langle w, w\rangle}$ ولنحسب:

$$\langle v', w\rangle =)(3+4i)\overline{(5+\imath)} + (2-3i)\overline{(2\imath)}$$
$$= (3+4i)(5-i) + (2-3i)(-2i) = 13+13i$$
$$\langle w, w\rangle = 25+1+4 = 30$$

إذاً

$$c = \frac{\langle v', w\rangle}{\langle w, w\rangle} = \frac{13+13i}{30}$$

ينتج من ذلك:

$$cw = \left(\frac{26}{15} + \frac{39}{15}i\,, -\frac{13}{15} + \frac{1}{15}i\right)$$

13− أوجد متجه وحدة متعامد مع المتجهات $v_1 = (2,2,4)\,, v_2 = (0,-1,-3)$ في $\mathbb{R}^3$.

الحل:

ليكن $w = (x,y,z)$ نريد أن يكون:

$$0 = \langle w, v_1\rangle = 2x + 2y + 4z$$
$$0 = \langle w, v_2\rangle = \quad -y - 3z$$

وبذلك نحصل على نظام المعادلات الخطي المتجانس:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + 4z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

لدينا $y=-3z$ وبوضع $z=1$ نجد أن $y=-3$ و $x=1$.

إذاً $w=(1,-3,1)$، نناظم w فنحصل على متجه الوحدة w' المطلوب والمتعامد مع v_1، v_2، أي:

$$w'=\frac{w}{\|w\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

14− ليكن $u=(0,1,-2,5)$ في $\mathbb{R}^4$ والمطلوب أوجد أساساً للمتمم العمودي $u^{\perp}$ للمتجه u.

الحل:

نبحث عن كل المتجهات (x,y,z,t) في $\mathbb{R}^4$ بحيث إن:

$$\langle(x,y,z,t),(0,1,-2,5)\rangle=0 \quad \text{أي} \quad 0.x+y-2z+5t=0$$

ومنه فإن المجاهيل الحرة هي x,z,t. نضع $x=1,z=0,t=0$

فنحصل على الحل $w_1=(1,0,0,0)$، ونضع $x=0,z=1,t=0$

فنحصل على الحل $w_2=(0,2,1,0)$، ونضع $x=0,z=,t=1$

فنحصل على الحل $w_3=(0,-5,0,1)$

ومنه فإن المتجهات w_1,w_2,w_3 تشكل أساساً لفضاء الحل. وبالتالي يتكون أساساً لـ$u^{\perp}$.

15− لتكن:

$$S=\{u_1=(1,1,0,-1),u_2=(1,2,1,3),u_3=(1,1,-9,2),u_4=(16,-13,1,3)\}$$

مجموعة متجهات في الفضاء $\mathbb{R}^4$. والمطلوب:

1) بين أن S هي مجموعة متعامدة.

2) هل S تشكل أساساً لـ$\mathbb{R}^4$؟

3) أوجد إحداثيات متجه اختياري $v=(a,b,c,d)$ في $\mathbb{R}^4$ بالنسبة للأساس S.

4) ناظِم المجموعة S للحصول على أساس ناظمي التعامد لـ$\mathbb{R}^4$.

الحل:

(1) $\langle u_1,u_2\rangle = 1+2+0-3=0, \langle u_1,u_3\rangle = 1+1+0-2=0$

$\langle u_1,u_4\rangle = 16-13+0-3=0 \ , \langle u_3,u_4\rangle = 16-13-9+6=0$

$\langle u_2,u_4\rangle = 16-26+1+9=0 \ , \langle u_2,u_3\rangle = 1+2-9+6=0$

وهذا يعني أن S متعامدة.

(2) نعم. بما أن S متعامدة فهي مستقلة خطياً وأي أربعة متجهات مستقلة خطياً في الفضاء $\mathbb{R}^4$ تشكل أساس له.

(3) بما أن S متعامدة فإننا نحتاج فقط لإيجاد معاملات فوريير للمتجه v بالنسبة لمتجهات الأساس كما في المبرهنة (4−2) وبذلك فإن:

$$\alpha_1 = \frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} = \frac{a+b-d}{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle} = \frac{a+2b+c+3d}{15}$$

$$\alpha_3 = \frac{\langle v,u_3\rangle}{\langle u_3,u_3\rangle} = \frac{a+b-9c+2d}{87}$$

$$\alpha_4 = \frac{\langle v,u_4\rangle}{\langle u_4,u_4\rangle} = \frac{16a-13b+c+3d}{435}$$

(4) لدينا $\|u_1\|^2 = 3 \ , \ \|u_2\|^2 = 15 \ , \ \|u_3\|^2 = 87 \ , \ \|u_4\|^2 = 435$

ومنه:

$$S' = \left\{ \begin{array}{c} u_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right) \\ u_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{87}}, \frac{1}{\sqrt{87}}, \frac{-9}{\sqrt{87}}, \frac{2}{\sqrt{87}}\right), u_4' = \left(\frac{16}{\sqrt{435}}, \frac{-13}{\sqrt{435}}, \frac{1}{\sqrt{435}}, \frac{3}{\sqrt{435}}\right) \end{array} \right\}$$

تمارين غير محلولة

1– في التمارين من (1) إلى (5) بين فيما إذا كان التطبيق المعرّف هو تطبيق ضرب داخلي على $\mathbb{R}^3$ أم لا، حيث $u=(a_1,a_2,a_3)$, $v=(b_1,b_2,b_3)$

(1) $\langle u,v\rangle = a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1a_2b_3$

(2) $\langle u,v\rangle = 2a_1b_1 + 5a_2b_2 + a_3b_3 - a_1b_3 - a_2b_3 - a_3b_2$

(3) $\langle u,v\rangle = a_1 + b_1$

(4) $\langle u,v\rangle = {a_1}^2{b_1}^2 + {a_2}^2{b_2}^2 + {a_3}^2{b_3}^2$

(5) $\langle u,v\rangle = a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3$

2– إذا كان $p,q \in P_2$ فأثبت أن:

$$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

هو تطبيق ضرب داخلي على P_2.

3– إذا كان $f,g \in \mathbb{C}[0,1]$، فهل:

$$\langle f(x),g(x)\rangle = f(1)g(0) + f(0)g(1) + f(0)g(1)$$

هي تطبيق ضرب داخلي على $\mathbb{C}[0,1]$.

(حيث $\mathbb{C}[0,1]$ هو الفضاء المتجهي لجميع الدوال الحقيقية المستمرة على المجال $[0,1]$)

4– إذا كان $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ فهل $\langle A,B\rangle = tr(AB)$ هو تطبيقضرب داخلي على $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

5–احسب الزاوية بين المتجهين في كلٍ من الحالات الآتية، وبين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي على $\mathbb{R}^3$:

1) $u=(-1,3,2)$, $v=(4,2,-1)$

2) $u=(-1,1,0)$, $v=(4,0,9)$

6– أعد التمرين السابق إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^3$ هو

$$\langle u,v\rangle = 7a_1b_1 + 3a_2b_2 + 4a_3b_3$$

7– في التمارين من (1) إلى (3) احسب الزاوية بين المتجهين وبيّن فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي على P_2 هو الضرب القياسي المعرف بالشكل

$$\langle p(x),q(x)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

(1) $p(x) = x^2 + 2x + 3 \quad , \ q(x) = x^2 + 1$

(2) $p(x) = 2x^2 + 5x - 1 \quad , \ q(x) = 9x^2 + 2x + 1$

(3) $p(x) = 2x^2 - x + 1 \quad , \ q(x) = x^2 + 2x$

8– في التمارين من (1) إلى (4) احسب الزاوية بين المتجهين ثم بين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي على $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ هو الضرب الداخلي المعرف بالمثال (8–4).

(1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

9–إذا كان $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ذا ضرب داخلي وكان $u,v \in V$. فأثبت أن:

1) $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$

2) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

10– ليكن $\mathbb{R}^2$ هو فضاء الضرب الداخلي الاقليدي. أثبت بالاعتماد على متراجحة كوشي –شفارتز أن:

$$(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 \le a^2 + b^2 \qquad ,\forall a,b,\theta \in \mathbb{R}$$

11– لتكن $f(x),g(x) \in \mathbb{C}[0,1]$، أثبت أن:

$$\left[\int_0^1 \left(f(x)+g(x)\right)^2 dx\right]^{1/2} \le \left[\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx\right]^{1/2} + \left[\int_0^1 \left(g(x)\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

12− استخدم خوارزمية (جرام −شميدت) لتحويل الأساس $\{1, x, x^2\}$ للفضاء

P_2إلى أساس متعامد ومنظم حيث الضرب الداخلي هو:

$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$(1)

$\langle p, q\rangle = \int_0^2 p(x)q(x)dx$ (2)

13− استخدم خوارزمية (جرام −شميدت) لإيجاد أساس متعامد ومنظم للفضاء

الجزئي من $\mathbb{C}[0,\pi]$ المولد بالمجموعة $\{v_1 = \sin x \ , v_2 = \cos x\}$

حيث الضرب الداخلي هو

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$$

14− استخدم خوارزمية (جرام −شميدت) لإيجاد أساس متعامد ومنظم للفضاء

الجزئي من $\mathbb{C}[0,1]$ المولد بالمجموعة $\{v_1 = 1\ , v_2 = e^x\}$ حيث الضرب

الداخلي هو

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

15− استخدم خوارزمية (جرام −شميدت) لتحويل الأساس

$$\{v_1 = 1, v_1 = x, v_1 = x^2, v_1 = x^3\}$$

للفضاءP_4إلى أساس متعامد ومنظم حيث الضرب الداخلي هو:

$$\langle p, q\rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

16−استخدم خوارزمية (جرام −شميدت) لإيجاد أساس متعامد ومنظم للفضاء

العمودي للمصفوفة A علماً أن الضرب الداخلي هو الضرب الداخلي الإقليدي:

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}3&0&5\\0&1&-2\\4&1&1\end{bmatrix}$

17– ليكن الفضاء ذو الضرب الداخلي $(\mathbb{R}^2,\langle\,,\rangle)$ حيث يعطى الضرب الداخلي

بالعلاقة: $\langle(a_1,b_1),(a_2,b_2)\rangle = 3a_1a_2 + 2b_1b_2$

استخدم قاعدة (جرام –شميدت) لإيجاد أساس متعامد ومنظم لهذا الفضاء وذلك:

(1) بدءاً من أساس نظامي في $\mathbb{R}^2$.

(2) بدءاً من الأساس $\{(2,2),(-3,7)\}$ في $\mathbb{R}^2$.

18– كرر التمرين السابق وذلك باستخدام الضرب الداخلي الإقليدي في $\mathbb{R}^2$.

19– ليكن الفضاء ذو الضرب الداخلي $(\mathbb{R}^3,\langle\,,\rangle)$حيث يعطى الضرب الداخلي

بالعلاقة: $\langle u,v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$

والمطلوب: استخدم عملية (جرام –شميدت) لتحويل الأساس

$\{u_1=(1,1,1),u_2=(1,1,0),u_1=(1,0,0)\}$

إلى أساس متعامد ومنظم.

20– إذا كان $(\mathbb{R}^3,\langle\,,\rangle)$ هو فضاء الضرب الداخلي الاقليدي. استخدم عملية (جرام –شميدت) لتحويل الأساس الآتي إلى أساس متعامد ومنظم.

(1) $\{u_1=(1,1,1),u_2=(-1,1,0),u_1=(1,2,1)\}$

(2) $\{u_1=(1,0,0),u_2=(3,7,-2),u_1=(0,4,1)\}$

21– أعد التمرين السابق (8–20) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^3$ هو:

$\langle u,v\rangle = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$

22– أوجد النقطة Q في المستوي $5x-3y+z=0$ الأقرب إلى النقطة $p(1,-2,4)$ وحدد المسافة بين النقطة p والمستوي.

(توجيه: انظر إلى المستوي كفضاء جزئي W من $\mathbb{R}^3$ مع الضرب الداخلي الإقليدي).

23– بفرض أن $u,v \in \mathbb{C}^3$ والمطلوب احسب $\langle u,v\rangle$،(حيث إن الضرب الداخلي هو الضرب الداخلي القياسي على $\mathbb{C}^3$):

1) $u=(1+i,2-5i,7+4i) \quad ,v=(3+2i,4i,7-3i)$

2) $u=(1-i,4,3) \quad ,v=(1+2i,2-3i,7+6i)$

24–احسب نظيم كلٍ من المتجهات التالية:

1) $(2-4i,6+2i,4-10i)\in \mathbb{C}^3$

2) $\begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ -4i & 3i \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$

25– أوجد أساس متعامد ومنظم للفضاء الجزئي E_1 من $\mathbb{C}^2$ المولد بالمتجهين:

$$\{(2i,i,4),(1+i,0,1-i)\}$$

26– أوجد أساس متعامد ومنظم لكلٍ من الفضاءات الجزئية التالية:

1) $w_1=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3: x-y+z=0\}$

2) $w_2=\left\{p(x)\in P_3 : \dfrac{d}{dx}p(x)=p(x)\right\}$

27– أوجد المتمم العمودي للفضاءات الجزئية التالية:

1) $E_1 = span\,\{(1,0,-2)\}$

2) $E_2 = span\,\{(1,1,1),(1,-4,-1)\}$

3) $E_3 = span\,\{(1,-5,2,-9)\}$

4) $E_4 = span\,\{(1,1,-5,1),(2,-7,2,1)\}$

5) $E_5 = span\,\{(1,0,-5,4,-1),(1,2,1,8,1),(1,-1,-8,2,-2)\}$

28– أوجد المتمم العمودي للفضاءات الجزئية التالية:

1) $E_1=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3: x-y-z=0\}$

2) $E_2=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3: x=y\,,y=z-x\}$

29– أوجد المتمم العمودي في الفضاء الواحدي $\mathbb{C}^3$ لكلٍ من الفضاءات الجزئية التالية بالنسبة للجداء العادي.

1) $w_1 = span\,\{(1,i,-1),(i,i,i)\}$

2) $w_2 = span\,\{(1,2,1-i),(1,i,0)\}$

3) $w_3 = span\,\{(1,2,1+i)\}$

4) $w_4 = span\,\{(1,i,1),(1+i,0,2)\}$

الفصل الخامس

الأشكال الخطية والفضاءات الثنوية

Linear Forms and Dual Spaces

(5−1) الشكل الخطي والفضاء الثنوي

Linear Form and Dual Space

ليكن Φ تطبيقاً عددياً على الفضاء المتجهي V على الحقل F ، بحيث إننا نقابل كل متجه v من V بعدد من الحقل F .

تعريف (1−1):

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل F . نسمي التطبيق المعرف على الفضاء V، والذي يأخذ قيمه في الحقل F ، شكلاً خطياً إذا تحقق مايلي:

$$1)\ \Phi(v_1+v_2)=\Phi(v_1)+\Phi(v_2) \quad ;\forall v_1,v_2\in V$$

$$2)\ \Phi(\alpha v)=\alpha\Phi(v) \quad ;\forall v\in V,\alpha\in F.$$

مثال (1−1):

ليكن $V=C[a,b]$ الفضاء المتجهي للدوال الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$.

نعرف التطبيق $\Phi: V\to\mathbb{R}$ بالشكل الآتي:

$$\Phi([f(t)])=\int_a^b c(t)f(t)\,dt$$

حيث إن $c(t)$ دالة ثابتة ومستمرة على المجال $[a,b]$. بين أن Φ شكل خطي على V.

الحل: لدينا

$$1)\quad \Phi\left(\left[f(t)+g(t)\right]\right)=\int_a^b c(t)\left[f(t)+g(t)\right]dt=$$

$$=\int_a^b c(t)f(t)dt+\int_a^b c(t)g(t)dt$$

$$=\Phi\left(\left[f(t)\right]\right)+\Phi\left(\left[g(t)\right]\right)$$

$$2)\quad \Phi\left(\alpha\left[f(t)\right]\right)=\int_a^b \alpha\left(c(t)f(t)\right)dt=\alpha\int_a^b c(t)f(t)dt$$

$$=\alpha\Phi\left(\left[f(t)\right]\right)$$

إذاً Φ شكل خطي على الفضاء المتجهي V.

ملاحظة (1−1):

يمكن دمج الشرطين (1) و(2) في التعريف (1−1) وذلك بالشكل الآتي:

$$\Phi(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1\Phi(v_1)+\alpha_2\Phi(v_2)\quad ;\forall v_1,v_2\in V,\forall\alpha_1,\alpha_2\in F$$

مثال (1−2):

ليكن $V=F^n$. بين أن التطبيق $\pi_i:V\to F$ (تطبيق الإسقاط i) المعرف بالشكل الآتي: $\pi_i\left(a_1,a_2,\dots,a_n\right)=a_i$

لكل $1\le i\le n$ يمثل شكلاً خطياً على الفضاء V.

الحل: ليكن $u,v\in V$

لدينا: $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\ ,\ v=(v_1,\dots,v_n)$

$$u+v=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$$

ومنه:
$$ku=(ku_1,....,ku_n)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_i(u+v)=u_i+v_i\\ \pi_i(u)+\pi_i(v)=u_i+v_i\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \pi_i(u+v)=\pi_i(u)+\pi_i(v)$$

وكذلك

$$\pi_i(ku)=ku_i=k.\pi_i(u)$$

إذا π_i يمثل شكلا خطيا على الفضاء V.

مثال (1−3):

ليكن $V=M_n(F)$ الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة من المرتبة n على الحقل F . وليكن التطبيق

$$\Phi:M_n(F)\to F$$

المعرف بالشكل الآتي:

$$\Phi(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=trA.$$

بين أن Φ شكل خطي.

الحل:

لدينا:

$$\Phi\left(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2\right)=tr\left(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2\right)=\alpha_1trA_1+\alpha_2trA_2=\alpha_1\Phi(A_1)+\alpha_2\Phi(A_2)$$

إذاً Φ شكل خطي على الفضاء المتجهي V.

مثال (1−4):

ليكن $V = M_n(F)$ الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة من المرتبة n على الحقل F . وليكن التطبيق

$$D : M_n(F) \to F$$

المعرف بالشكل الآتي: $D(A) = \det A$ فهلD هو شكل خطي.

الحل: إن D ليس شكلاً خطياً لأنه إذا كانت:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ،} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

فإن :
$$D(A) = 0,\ D(B) = 0$$

$$D(A) + D(B) = 0 \neq D(A+B) = D(I) = 1$$

إذا D ليس شكلاً خطياً على الفضاء المتجهي V.

نرمز لمجموعة جميع الأشكال الخطية على الفضاء المتجهي V بالرمز V^*، ونعرف عليها عمليتين إحداهما داخلية وهي الجمع، والأخرى خارجية، وهي ضرب تطبيق بعدد من الحقل، وذلك بالشكل الآتي:

(2-1)
$$1)\ (\Phi + \psi)(v) = \Phi(v) + \psi(v) \quad ; \forall \Phi, \psi \in V^*, \forall u \in V$$
$$2)\ (\alpha \Phi)(v) = \alpha \Phi(v) \quad ; \forall \Phi \in V^* ; \forall \alpha \in F$$

نلاحظ أن مجموعة كل الأشكال الخطية على فضاء متجهي على الحقل F تشكل أيضاً فضاءً متجهياً على الحقل F بالنسبة للعمليتين المعرفتين في العلاقات (1−2).

تعريف (1−2):

يسمى الفضاء المتجهي للأشكال الخطية على V بالفضاء الثنوي للفضاء V. ونرمزله بالرمز V^*.

مبرهنة (1−1):

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل F بعده منته ويساوي n. عندئذ يكون بعد الفضاء V^* أيضاً n.

البرهان:

ليكن $B=\{v_1,...,v_n\}$ أساساً للفضاء المتجهي V. عندئذ نعبر عن أي متجه $v\in V$ بالشكل الآتي:

$$v=\sum_{i=1}^{n}x_i v_i$$

ومنه نجد بأن لكل $\Phi\in V^*$ يكون:

$$\Phi(v)=\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\Phi(v_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i \quad ,\alpha_i\in F$$

وبالتالي $\alpha_i=\Phi(v_i)$ لكل $1\le i\le n$، أي أن الشكل الخطي Φ على V يعرف بشكل وحيد بدلالة المجموعة $(\alpha_1,...,\alpha_n)$. إذاً V^* يتماثل مع الفضاء الحسابي F^n ويكون $\dim V^*=n$.

مثال (1−5):

ليكن $V=F^n$ الفضاء المتجهي الحسابي على الحقل F. بين مطابقة الفضاء V^* يتطابق مع فضاء متجهات السطر.

الحل:

ليكن $\psi\in V^*$، أي $\psi:V\to F$. نختار الأساس الطبيعي للفضاء V. عندئذ نمثل ψ بدلالة المصفوفة $[\psi]$، وهي عبارة عن مصفوفة السطر. إن التطبيق $\psi\to[\psi]$

تماثل بين V^* والفضاء الحسابي $V = F^n$. كما أن أي مصفوفة سطر $\Phi = [a_1,...,a_n]$ تعرف شكلاً خطياً $\Phi : V \to F$ بالشكل الآتي:

$$\Phi[x_1,...,x_n] = [a_1...a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

مثال (1 – 6) :

ليكن ϕ شكلاً خطياً على $V = \mathbb{R}^2$ معرفاً بواسطة :

$\phi(1,2) = 15$ و $\phi(-2,1) = -10$ ولنوجد الشكل الخطي ϕ .

الحل : ليكن $\phi = (a,b)$ متجهاً سطرياً ولدينا :

$$a + 2b = 15 \quad \text{أو} \quad (a,b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$$

$$-2a + b = -10 \quad \text{أو} \quad (a,b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$$

المعادلتان معاً تعطيان $a = 7$ ، $b = 4$ وبذلك يكون $\phi = (7,4)$

و $\phi(x,y) = 4x + 7y$

(2–5)أساس الفضاء الثنوي

Dual SpaceBasis

لاحظنا أن بعد الفضاء الثنوي V^* يتطابق مع بعد الفضاء المتجهي V على الحقل F .

وذلك لأن :

$$\dim V^* = \dim(Hom(V,F)) = (\dim V)\cdot(\dim F) = n.1 = n$$

نبين الآن أن كل أساس للفضاء V يحدد أساساً للفضاءV^*.

مبرهنة (2−1):

ليكن V فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقل F ، وليكن $B=\{v_1,...,v_n\}$ أساساً للفضاء V. عندئذ مجموعة الأشكال الخطية $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ من الفضاء V^* والمعرفة بالشكل الآتي:

$$\Phi_i(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & ;i\neq j\\ 1 & ;i=j\end{cases}$$

تشكل أساساً للفضاء V^*.

البرهان:

لنثبت بدايةً أن المجموعة $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ مستقلة خطياً.

نفرض أن:

$$\alpha_1\Phi_1+\alpha_2\Phi_2+...+\alpha_n\Phi_n=0\ ;\ \alpha_i\in F\ ,\ 1\le i\le n \qquad (2-2)$$

نطبق العلاقة $(2-2)$ على v_i، حيث إن $1\le i\le n$، فنجد أن:

$$(\alpha_1\Phi_1+...+\alpha_n\Phi_n)(v_i)=0(v_i)=0$$

ومنه يكون:

$$\alpha_1\Phi_1(v_i)+...+\alpha_n\Phi_n(v_i)=\alpha_1.0+...+\alpha_i.1+\alpha_n.0=\alpha_i$$

أي إن $\alpha_i=0$ لكل $1\le i\le n$، وبالتالي تكون المجموعة $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ مستقلة خطياً.

يبقى إثبات أن المجموعة $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ تولد الفضاء V^*.

ليكن $\Phi\in V^*$ ، بحيث إن:

$$\Phi(v_1)=\alpha_1,...,\Phi(v_n)=\alpha_n$$

وبأخذ $\psi=\alpha_1\Phi_1+...+\alpha_n\Phi_n$. عندئذ يكون:

$$\psi(v_i)=(\alpha_1\Phi_1+...+\alpha_n\Phi_n)(v_i)$$
$$=\alpha_1\Phi_1(v_i)+...+\alpha_i\Phi_i(v_i)+...+\alpha_n\Phi_n(v_i)$$
$$=\alpha_1.0+...+\alpha_i.1+...+\alpha_n.0=\alpha_i$$

وبالتالي نجد أن $\Phi(v_i)=\psi(v_i)$ ، حيث $1\le i\le n$. إذاً:

$$.\ \psi=\Phi=\alpha_1\Phi_1+...+\alpha_n\Phi_n$$

ومنه نجد أن $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ تولد V^* . وبذلك تكون هذه المجموعة أساساً للفضاء V^* .

تعريف (2−1):

نسمي الأساس $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ للفضاء الثنوي V^* بالأساس الثنوي للأساس $\{v_1,...,v_n\}$.

مثال (2−1):

ليكن $v_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ متجهين يشكلان أساساً للفضاء $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$. أوجد مصفوفتي السطرين ϕ_1,ϕ_2 اللتين تشكلان الأساس الثنوي للفضاء $\mathbb{R}^2$.

الحل:

ليكن $\Phi_1=(\alpha_1,\alpha_2)$ الأساس الثنوي الممثل بالمصفوفة السطرية.

لدينا

$$\phi_1(v_1)=1\ \ ,\ \ \phi_2(v_1)=0$$

ومنه:

$$\Phi_1(v_1)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\alpha_1+\alpha_2=1\ ,$$

$$\Phi_1(v_2)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3\alpha_1+2\alpha_2=0\ .$$

إذاً $\alpha_2=3\ ,\ \alpha_1=2$ ، وبالتالي يكون $\Phi_1=(2,-3)$.

ليكن $\Phi_2=(\beta_1,\beta_2)$. لدينا $\Phi_2(v_2)=1\ ,\ \Phi_1(v_2)=0$. عندئذ نجد:

$$\Phi_1(v_2)=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\beta_1+\beta_2=0$$

$$\Phi_2(v_2)=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3\beta_1+2\beta_2=1$$

إذاً $\beta_2=2\ ,\ \beta_1=-1$ ، وبالتالي $\Phi_2=(-1,2)$.

مثال (2−2):

أوجد الأساس الثنوي للأساس $\{v_1=(-1,3)\ ,\ v_2=(1,-2)\}$ للفضاء $\mathbb{R}^2$.

الحل:

لدينا

$$\Phi_1(x,y)=\alpha_1x+\alpha_2y$$
$$\Phi_2(x,y)=\beta_1x+\beta_2y$$

بحيث إن:

$$\Phi_1(v_1)=1\ ,\ \Phi_1(v_2)=0\ ,\ \Phi_2(v_1)=0\ ,\ \Phi_2(v_2)=1$$

ومنه نجد أن:

$$\Phi_1(v_1) = \Phi_1(-1,3) = -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1$$
$$\Phi_1(v_2) = \Phi_1(1,-2) = \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$$

وبالتالي يكون:

$$\alpha_1 = 2 \ , \ \alpha_2 = 1 \ ,$$

إذاً:

$$\Phi_1(x,y) = 2x + y \ ,$$

بما أن:

$$\Phi_2(v_1) = 0 \ , \ \Phi_2(v_2) = 1 \ ,$$

فإن:

$$\Phi_2(v_1) = \Phi_2(1,-3) = -\beta_1 + 3\beta_2 = 0 \ ,$$
$$\Phi_2(v_2) = \Phi_2(1,-2) = \beta_1 - 2\beta_2 = 1 \ .$$

وبالتالي يكون:

$$\beta_1 = 3 \ , \ \beta_2 = 1$$

عندئذ:

$$\Phi_2(x,y) = 3x + y \ ,$$

ومنه الأساس الثنوي هو:

$$\left\{ \Phi_1(x,y) = 2x + y \ , \ \Phi_2(x,y) = 3x + y \right\} .$$

مثال (2−3):

ليكن $V=\mathbb{R}[x]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{R}$والتي درجة كل منها أصغر أوتساوي الواحد:

$$V=\{f(x)=\alpha x+\beta \in \mathbb{R}[x]; degf \leq 1\}$$

وليكن

$$\Phi_1 : V \to \mathbb{R} \qquad , \qquad \Phi_2 : V \to \mathbb{R}$$

معرفتين بالشكل الآتي:

$$\Phi_1\big(f(x)\big)=\int_0^1 f(x)\,dx \;\; ; \;\; \Phi_2\big(f(x)\big)=\int_0^2 f(x)\,dx$$

أوجد أساساً $\{v_1,v_2\}$ للفضاء V يكون ثنوياً للأساس $\{\Phi_1,\Phi_2\}$.

الحل:

ليكن

$$v_1=\alpha_1+\alpha_2 x \;\; , \;\; v_2=\beta_1+\beta_2 x$$

بما أن

$$\Phi_1(v_1)=1 \;\; , \;\; \Phi_2(v_1)=0$$

فإنه يكون:

$$\Phi_1(v_1)=\int_0^1(\alpha_1+\alpha_2 x)\,dx=\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2=1 \; ,$$

$$\Phi_2(v_1)=\int_0^2(\alpha_1+\alpha_2 x)\,dx=2\alpha_1+2\alpha_2=0 \; .$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\alpha_1 = 2 \ , \ \alpha_2 = -2 \ ,$$

ويما أن:

$$\Phi_1(v_2) = 0 \ , \ \Phi_2(v_2) = 1$$

فإنه يكون:

$$\Phi_1(v_2) = \int_0^1 (\beta_1 + \beta_2 x)\, dx = \beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 = 0 \ ,$$
$$\Phi_2(v_2) = \int_0^2 (\beta_1 + \beta_2 x)\, dx = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 1 \ .$$

وبالتالي يكون:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \ , \ \beta_2 = 1 \ .$$

عندئذ الأساس المطلوب هو $\left\{ 2 - 2x \ , -\frac{1}{2} + x \right\}$.

مبرهنة (2−2):

ليكن V فضاءً متجهياً بعده منته n. وليكن $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساساً للفضاء V و $\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$ أساساً للفضاء V^*. عندئذ يكون:

$$1) \ v = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(u) v_i = \Phi_1(u) v_1 + \Phi_2(u) v_2 + ... + \Phi_n(u) v_n \quad ; \ \forall u \in V$$

$$2) \ \psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) \Phi_i = \psi(v_1)\Phi_1 + \psi(v_2)\Phi_2 + ... + \psi(v_n)\Phi_n \quad ; \ \forall \psi \in V^* \ .$$

البرهان:

بما أن كل متجه $u \in V$ يكتب بشكل وحيد كتركيب خطي لعناصر الأساس:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_i \in F ,$$

ومنه يكون:

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j \quad ; \quad j = 1, 2, ..., n ,$$

نعوض α_j بما يساويها نجد أن الشرط (1) محقق.

بما أن $\{\Phi_1, ..., \Phi_n\}$ أساس للفضاء V^*. عندئذ يكون:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Phi_i \quad ; \quad \forall \psi \in V^*$$

ومنه يكون:

$$\psi(v_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \Phi_i \right)(v_j) = \left(\sum \beta_i \Phi_i (v_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{ij} = \beta_j \ .$$

نعوض β_j بما يساويها، نجد أن الشرط (2) محقق أيضاً.

مثال (2−4):

أوجد الأساس الثنوي للأساس:

$$\{ v_1 = (1,1,1) , v_2 = (1,1,0) , v_3 = (1,0,0) \}$$

للفضاء $\mathbb{R}^3$، ثم اكتب الشكل الخطي $\psi(x, y, z) = 8x - 3y + 4z$ كتركيب خطي لأساس الفضاء V^*. كذلك اكتب $v = (2, 4, -5)$ كتركيب خطي لأساس الفضاء V .

الحل: لدينا

$$\Phi_1(x,y,z)=\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z$$
$$\Phi_2(x,y,z)=\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z$$
$$\Phi_3(x,y,z)=\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z$$

بحيث إن:

$$\Phi_1(v_1)=1\ ,\ \Phi_1(v_2)=0\ ,\ \Phi_1(v_3)=0\ ,$$

ومنه نجد

أن:

$$\Phi_1(v_1)=\Phi_1(1,1,1)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\ ,$$
$$\Phi_1(v_2)=\Phi_1(1,1,0)=\alpha_1+\beta_2=0\ ,$$
$$\Phi_1(v_3)=\Phi_1(1,0,0)=\alpha_1=0\ ,$$

وبالتالي يكون:

$$\alpha_1=\alpha_2=0\ \ ,\ \ \alpha_3=1.$$

إذاً

$$\Phi_1(x,y,z)=z$$

بما أن:

$$\Phi_2(v_1)=0\ \ ,\ \ \Phi_2(v_2)=1\ \ ,\ \ \Phi_2(v_3)=0\ ,$$

فإن:

$$\Phi_2(v_1)=\Phi_2(1,1,1)=\beta_1+\beta_2+\beta_3=0\ ;$$
$$\Phi_2(v_2)=\Phi_2(1,1,0)=\beta_1+\beta_2=1\ ;$$
$$\Phi_2(v_3)=\Phi_2(1,0,0)=\beta_1=0\ .$$

وبالتالي يكون:

$$\beta_1 = 0 \ , \ \beta_2 = 1 \ , \ \beta_3 = -1 \, .$$

إذاً:

$$\Phi_2(x, y, z) = y - z \ .$$

بما أن:

$$\Phi_3(v_1) = 0 \ , \ \Phi_3(v_2) = 0 \ , \ \Phi_3(v_3) = 1$$

فإن:

$$\begin{aligned} \Phi_3(v_1) &= \Phi_3(1,1,1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \ ; \\ \Phi_3(v_2) &= \Phi_3(1,1,0) = \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \ ; \\ \Phi_3(v_3) &= \Phi_3(1,0,0) = \gamma_1 = 1 \ , \end{aligned}$$

وبالتالي يكون:

$$\gamma_1 = 1 \ , \ \gamma_2 = -1 \ , \ \gamma_3 = 0$$

إذاً:

$$\Phi_3(x, y, z) = x - y \ .$$

ومنه فالأساس الثنوي هو:

$$\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\} = \{z, y - z, x - y\}$$

وكذلك لدينا:

$$\psi = \sum_{i=1}^{3} \psi(v_i)\Phi_i = 9\Phi_1 + 5\Phi_2 + 8\Phi_3$$

وأيضاً يكون:

$$v=(2,4,-5)=\sum_{i=1}^{3}\Phi_i(v).v_i$$
$$=\Phi_1(2,4,-5).v_1+\Phi_2(2,4,-5).v_2$$
$$+\Phi_3(2,4,-5).v_3$$
$$=-5v_1+9v_2-2v_3\,.$$

مبرهنة (2−3):

ليكن $B'=\{v'_1,\ldots,v'_n\}$, $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ أساسين للفضاء المتجهي V. وليكن $B'^*=\{\Phi'_1,\ldots,\Phi'_n\}$, $B^*=\{\Phi_1,\ldots,\Phi_n\}$ أساسين للفضاء الثنوي V^* على الترتيب، كما ولتكن P مصفوفة الانتقال من الأساس B إلى الأساس B'. عندئذ تكون $\left(P^{-1}\right)^T$ مصفوفة الانتقال من B^* إلى B'^*.

البرهان:

ليكن

$$v'_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}v_i\ \ ,\ \ \Phi'_i=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\Phi_j\ ,$$

حيث

$$P=\left[\alpha_{ij}\right]\ ,\ Q=\left[\beta_{ij}\right]$$

ليكن X_i السطر i من المصفوفة Q، و Y_j هو العمود j من المصفوفة P^T، أي

إن:

$$X_i = [\beta_{i1} \ \beta_{i2} \ \dots \ \beta_{in}] \ ,$$

$$Y_j = \begin{bmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \\ \cdot \\ \vdots \\ \alpha_{jn} \end{bmatrix} \ ,$$

وبالتالي، وحسب تعريف الأساس الثنوي، يكون لدينا:

$$\Phi'_i(v'_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \Phi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} v_i \right) = \sum_{i,j} \beta_{ij} \alpha_{ji} \Phi_j(v_i) = X_i Y_j = \delta_{ij}$$

إذاً:

$$Q P^T = \begin{bmatrix} X_1Y_1 \ \dots \ X_1Y_n \\ X_2Y_1 \ \dots \ X_2Y_n \\ .. \quad \dots \quad .. \\ X_nY_1 \ \dots X_nY_n \end{bmatrix} = I \ ,$$

أي إن $Q P^T = I$ ، وبالتالي $Q = (P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$.

مثال (2-5):

ليكن $V = \mathbb{R}^2$ وليكن :

$$B = \{v_1 = (1,1) \ , v_2 = (1,0)\} \ ,$$

$$B^1 = \{v_1^` = (4,3), v_2^` = (3,2)\}$$

أساسين للفضاء $\mathbb{R}^2$ والمطلوب:

1- أوجد الأساس الثنوي $B^{`*}$ , $B^*$ للأساسين $B$ , $B^`$ على الترتيب.
2- أوجد مصفوفتي الانتقال P من الأساس B إلى الأساس $B^`$ والمصفوفة $Q^`$ من الأساس B^* إلى الأساس $B^{`*}$.
3- حقق صحة العلاقة $Q=(P^{-1})^T$.

الحل:

1- ليكن:

$$\emptyset_1(x,y) = \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

$$, \quad \emptyset_2(x,y) = \beta_1 x + \beta_2 y$$

وبما أن:

$$\emptyset_1(v_1) = 1 \quad , \quad \emptyset_1(v_2) = 0$$

فإن :

$$\emptyset_1(v_1) = \emptyset_1(1,1) = x + y = 1$$
$$\emptyset_1(v_2) = \emptyset_2(1,0) = 1x = 0$$
$$\Longrightarrow \alpha_1 = 0 , \alpha_2 = 1$$

إذاً :

$$\emptyset_1(x,y) = y$$

و بالطريقة نفسها نجد أن :

$$\beta_1 = 1 , \beta_2 = -1$$

ومنه:

$$\emptyset_2(x,y) = x - y$$

إذاً:

$$B^* = \{y , x - y\}$$

ليكن :

$$\emptyset\grave{}_1(x,y) = \gamma_1 x + \gamma_2 y \; , \; \emptyset\grave{}_2(x,y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y$$

وبما أن :

$$\emptyset\grave{}_1(u_1) = 1 , \emptyset\grave{}_1(u_2) = 0$$
$$\Longrightarrow 4x + 3y = 1 \quad , 3x + 2y = 0$$

ومنه نجد:

$$\gamma_1 = -2 , \gamma_2 = 3$$

ويكون:

$$\emptyset\grave{}_1(x,y) = -2x + 3y$$

و بالطريقة نفسها :

$$\emptyset\grave{}_2(x,y) = +3x - 4y$$

إذاً:

$$B\grave{}^* = \{-2x + 3y , \; +3x - 4y\}$$

2- لدينا:

$$v_1^` = 3v_1+2v_2 \ \ , \ v_2^` = 2v_1 + v_2$$

وبالتالي فإن مصفوفة الانتقال P من الأساس B إلى الأساس B' تعطى بالشكل:

$$P=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ولدينا أيضاً أن:

$$\emptyset_1^` = \emptyset_1^`(v_1)\emptyset_1 + \emptyset_1^`(v_2)\emptyset_2 = \emptyset_1 - 2\emptyset_2$$
$$\emptyset_2^` = \emptyset_2^`(v_1)\emptyset_1 + \emptyset_2^`(v_2)\emptyset_2 = -\emptyset_1 + 3\emptyset_2$$

ومنه نجد:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

3- نوجد P^{-1} أي نوجد:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \ (P^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = Q$$

وهذا ما يحقق صحة العلاقة .

(3–2) الفضاء الثنوي الثاني

Second Dual Space

نلاحظ مما سبق أن لكل فضاء متجهي V منتهي البعد على الحقل F ، يوجد فضاء ثنوي V^* (أي فضاء التطبيقات الخطية من V إلى F). ونريد الآن الإجابة على السؤال التالي:

هل يوجد للفضاء الثنوي V^* فضاء ثنوي أيضاً وماذا يطلق عليه؟

تعريف (3–1):

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل F ، وليكن V^* الفضاء الثنوي له. نسمي الفضاء المتجهي للتطبيقات الخطية من V^* إلى F بالفضاء الثنوي الثاني، ويرمز له بالشكل V^{**} ، أي أن V^{**} هو ثنويثنوي الفضاء V .

ملاحظة (3−1):

ليكن V فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقل F وليكن $v\in \mathrm{V}$ ، نعرف التطبيق:

$$\mu_v : \mathrm{V}^* \to F : \mu_v(\Phi)=\Phi(v) \ , \ \forall v\in \mathrm{V} \ ,$$

إن $\mu_v(\Phi)$ شكل خطي، وذلك لأن:

$$\mu_v\left(\alpha_1\Phi_1+\alpha_2\Phi_2\right)=\alpha_1\Phi_1(v)+\alpha_2\Phi_2(v)=\alpha_1\mu_v(\Phi_1)+\alpha_2\mu_v(\Phi_2) \ ,$$

وذلك لكل $\Phi_1,\Phi_2\in \mathrm{V}^*$, $\alpha_1,\alpha_2\in F$.

إذاً يمكن تعريف الفضاء الثنوي الثاني بأنه المجموعة:

$$\mathrm{V}^{**}=\left\{\mu_v : \mu_v(\Phi)=\Phi(v) \ ; \ \forall\Phi\in \mathrm{V}^*\right\} \ ,$$

والمحققة لشروط الفضاء المتجهي.

مبرهنة (3−1):

ليكن V فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقل F . عندئذ $\mathrm{V}\cong \mathrm{V}^{**}$.

البرهان:

نعرف التطبيق:

$$\lambda : \mathrm{V}\to \mathrm{V}^{**} : \lambda(v)=\mu_v \, ; v\in \mathrm{V}$$

لنثبت أن λ تطبيق خطي، أي أن:

$$\begin{aligned}\lambda\left(\alpha_1u+\alpha_2v\right)&=\mu_{\alpha_1u+\alpha_2v}(\Phi)=\Phi\left(\alpha_1u+\alpha_2v\right)=\\&=\alpha_1\Phi(u)+\alpha_2\Phi(v)=\alpha_1\mu_v(\Phi)+\alpha_2\mu_v(\Phi)\\&=\alpha_1\lambda(u)+\alpha_2\lambda(v) \ ; \ \forall \ u,v\in \mathrm{V} \ , \ \forall\Phi\in \mathrm{V}^* \ , \ \forall\alpha_1,\alpha_2\in F\end{aligned}$$

ليكن $\{v_1,...,v_n\}$, $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ أساسين للفضاءين V و V^* على الترتيب. عندئذ:

$$\mu_{v_i}(\Phi_j) = \Phi_j(v_i) = \delta_{ji} = \begin{Bmatrix} 0 & ; & i \neq j \\ 1 & ; & i = j \end{Bmatrix}$$

وبالتالي يكون $\{\mu_{v_1},...,\mu_{v_n}\}$ أساساً ثنوياً لـ $\{\Phi_1,...,\Phi_n\}$ والتطبيق λ يكون تماثلاً بين الفضاءين V و V^{**}، أي أن $\mathrm{V} \cong \mathrm{V}^{**}$. إذاً يكون:

$$\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{V}^* = \dim \mathrm{V}^{**}$$

(2–4) عادم الفضاء الجزئي

Annihilator of Subspace

ليكن V فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقل F و U فضاءً جزئياً في V وليكن V^* الفضاء الثنوي له.

تعريف (4–1):

نقول إن الشكل الخطي $\Phi \in \mathrm{V}^*$ عادم للفضاء الجزئي U من الفضاء V إذا تحقق ما يلي:

$$\Phi(U) = 0 \quad \text{أو} \quad \Phi(u) = 0 \, , \, \forall u \in U \, .$$

يرمز لعوادم U بالرمز U^O .

مبرهنة (4–1):

ليكن Vفضاءً متجهياً على الحقل F . وليكن $U \subseteq V$ فضاء جزئي من V عندئذ إن عادم الفضاء الجزئي U يشكل فضاءً جزئياً من الفضاء الثنوي V^*.

البرهان:

إن العادم U^0للفضاء الجزئي U هو مجموعة غير خالية. وذلك لأن الشكل الخطي الصفري $0 \in U^0$ يحقق:

$$0(u) = 0, \forall \, u \in U$$

إذاً : $0\epsilon U^0$ وإذا كانت $\emptyset\ ,\Psi \in U^0$

فإن:

$$(\alpha_1\emptyset + \alpha_2\psi)(u) = \alpha_1\emptyset(u) + \alpha_2\psi(u)$$
$$= \alpha_1.0 + \alpha_2.0 = 0$$

أي أن:

$$\alpha_1\emptyset + \alpha_2\psi \,\epsilon U^0$$

وهذا يبرهن أن U^0هو فضاء جزئي من V^*.

ملاحظة (4−1): من السهل ملاحظة أن:

$$U = \{\,0\} \Longrightarrow U^0 = V^*\ ,$$
$$U = V \Longrightarrow U^0 = \{0\}$$

مثال (4−1):

أوجد U^0الفضاء العادم للفضاء الجزئي U من R^3 حيث:

$$U=\{(x,\ y,x)\,\epsilon R^3 :\ 2x - y = 0\ ,-x + 2y + z\ = 0\}$$

الحل:

نوجد أساساً للفضاء U:

بحل نظام المعادلات الخطي المتجانس:

$$2x - y = 0$$
$$-x + 2y + z\ = 0$$

نجد أن أساس U هو:

{ u=(-1,-2,3)}

فإذا كان:

$$\emptyset(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

يكون:

$$\forall\, v\ \in U\emptyset(v) = 0$$

لذلك يكفي أن يكون :

$$\emptyset(u) = 0$$

ومنه : $-\alpha - 2\,\beta + 3\gamma = 0$

وهي معادلة بثلاثة مجاهيل:

ومنه: $\gamma = \alpha_1\ ,\beta = \alpha_2$

$$\alpha = -2\alpha_2 + 3\alpha_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha_2 + 3\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي أساس U^0 هو:

$$\{ \emptyset_1 = 3x+z \ , \ \emptyset_2 = -2x + y \}$$

ونلاحظ أن: $dim U^0 = 2$.

مبرهنة (4–2):

إذا كان U_1 , U_2 فضاءين متجهين جزئيين متكاملين من الفضاء المتجهي المنهي البعد V فإن U_1^0 , U_2^0 فضاءان متجهان جزئيان متكاملان من V^* .

البرهان:

لنفرض أن $dim U_1 = r$ فيكون $dim U_2 = n - r$ وليكن:

B= $\{v_1, v_2, \dots, v_r v_{r+1}, \dots v_n\}$

أساس مرتب في V حيث يكون: $\{v_1, v_2, \dots, vr\}$ أساس لـ U_1

ولنفرض أن ثنويتها هي:

$$B^* = \{\emptyset_1, \emptyset_2, \dots, \emptyset_r \quad , \emptyset_{r+1}, \dots, \emptyset_n\}$$

إن كل متجهة $\psi \in U_1^0$ هو متجهة من V^* حسب المبرهنة (2–2) نكتب ψ على الشكل التالي:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i)\emptyset_i \qquad (5-1)$$

ولكن $\psi(v_i) = 0$ من أجل i = 1,2,.....,r لأن $\psi \in U_1^0$ ولهذا نكتب (5-1) كما يلي:

$$\psi = \sum_{i=r+1}^{n} \psi(v_i)\emptyset_i$$

وهذا يبرهن أن $\emptyset_{r+1}, \emptyset_{r+2}, \dots, \emptyset_n$ } أساس لـ U_1^0.

وبطريقة مشابهة تماماً نبرهن أن { $\emptyset_1, \emptyset_2, \dots, \emptyset_r$ } أساس لـ U_2^0 وبالتالي يكون :

$$V^* = U_1^0 \oplus U_2^0$$

نتيجة (4-1):

إذا كان V فضاءً متجهياً منتهي البعد بعده n وليكن U فضاءً جزئياً من V فإن:

1. إذا كان $dim U = r$ فإن $dim\ U^0 = n-r$
2. $dimV = dimU + dimU^0$ (5-2)

مبرهنة (4-3):

إذا كان V فضاءً متجهياً منتهي البعد بعده n

U_1, U_2 فضاءان جزئيان منه عندها القضايا التالية صحيحة:

-1 $U^{00} = (U_1^0)^0 = U_1$

-2 $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2^0 \subseteq U_1^0$

-3 $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$

-4 $(U_1 \cap U_2) = U_1^0 + U_2^0$

البرهان:

-1 مهما يكن $v \in U_1$ وبفرض أن $\emptyset \in U_1^0$ فإن: $\emptyset(v) = 0,$ كذلك من تعريف العادموبسبب مطابقة V مع V^{**} فإن: $v \in (U_1^0)^0$

ومنه: $U_1 \subseteq (U_1^0)^0$ومن ناحية ثانية وحسب النتيجة (4-1) نجد:

$$(dimU_1^0)^0 = n - dimU_1^0 = n - (n- dimU_1) = dimU_1$$

ومنه ينتج أن: $U_1 = (U_1^0)^0 = U_1^{00}$

-2 ليكن $\psi \in U_2^0$ ومنه :

$$\psi(u) = 0\ ;\ \forall u \in U_2$$

وبما أن $U_1 \subseteq U_2$ ينتج أن:

$$\psi(u) = 0\ ;\ \forall\ u\ \in\ U_1$$

وبالتالي $\psi\ \in U_1^0$ ومنه:

$$U_2^0 \subseteq U_1^0$$

3- بالاستفادة من البند السابق 2

$$U_1 \subseteq U_1 + U_2 \Longrightarrow (U_1 + U_2)^0 \subseteq U_1^0$$

و

$$U_2 \subseteq U_1 + U_2 \Longrightarrow (U_1 + U_2)^0 \subseteq U_2^0$$

ومنه $(5-3)$ $(U_1 + U_2)^0 \subseteq U_1^0 \cap U_2^0$

ومن ناحية ثانية :

$$\psi \in U_1^0 \cap U_2^0 \Longrightarrow \psi \in U_1^0 \wedge \psi \in U_2^0$$

فإذا كان: $v = v_1 + v_2 \in U_1 + U_2$ وحيث يكون: $v_1 \in U_1$, $v_2 \in U_2$

يكون لدينا: $\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2) = 0$

ومنه: $\psi \in (U_1 + U_2)^0$

وبالتالي بنتج: $(5-4)$　　$U_1^0 \cap U_2^0 \subseteq (U_1 + U_2)^0$

ومن $(5-3)$ و $(5-4)$ ينتج المطلوب .

4- تنتج مباشرة بتطبيق البند السابق 3.

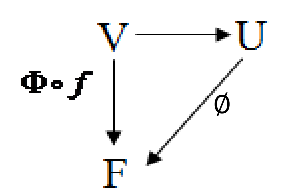
(5–2) منقول تطبيق خطي

Transpose of Linear Mapping

ليكن U و V فضاءين متجهين على الحقل F . نعتبر التطبيق الخطي $f : V \to U$ ، ونريد تعريف منقول التطبيق f والذي نرمز له بالرمز f^T .

تعريف (5–1):

ليكن $\Phi \in U^*$. عندئذ نسمي التطبيق $\Phi \to \Phi \circ f$ من U^* إلى V^* بمنقول التطبيق f ، حيث:



وكذلك فإن: $f^{t}:U^{*}\to \mathrm{V}^{*}$

يعطى بالعلاقة الآتية: $f^{t}(\Phi)=\Phi\circ f\ ;\ \forall\Phi\in U^{*},$

وبالتالي: $\left[f^{t}(\Phi)\right](v)=(\Phi\circ f)(v)=\Phi\big(f(v)\big)\ ;\ \forall v\in \mathrm{V}$

نلاحظ أن منقول تطبيق خطي يشكل تطبيقاً خطياً، وذلك لأن:

$$f^{t}(\alpha_1\Phi_1+\alpha_2\Phi_2)=\alpha_1(\Phi_1\circ f)+\alpha_2(\Phi_2\circ f)=\alpha_1 f^{t}(\Phi_1)+\alpha_2 f^{t}(\Phi_2)$$
$$;\ \forall\alpha_1\,,\,\alpha_2\in F\quad;\quad \forall\Phi_1\,,\,\Phi_2\in U^{*}$$

ملاحظة (5−1):

ليكن $f:\mathrm{V}\to U$ تطبيقاً خطياً من الفضاء المتجهي V إلى الفضاء المتجهي U.
عندئذ يوجد لـ f منقول وحيد $f^{t}:U^{*}\to \mathrm{V}^{*}$.

مثال (5−1):

ليكن الشكل الخطي $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ;\ \Phi(x,y)=-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3y}$

وليكن المؤثر الخطي: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعطى بالشكل الآتي:

$$f(x,y)=(x-2y,-3x+4y)$$

والمطلوب: أوجد $\left[f^{t}(\Phi)\right](x,y)$.

الحل:

نلاحظ أن

$$\left[f^t(\Phi)\right](x,y)=(\Phi\circ f)(x,y)=\Phi\left(f(x,y)\right)=\Phi\left(x-2y\ ,\ -3x+4y\right)$$
$$=-2(x-2y)+3(-3x+4y)=-2x+4y-9x+12y=-11x+16y\ \ .$$

مثال (5−2):

ليكن الشكل الخطي:

$$\emptyset:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\ ;\ \ \emptyset(x,y)=3x-7y$$

وليكن التطبيق الخطي:

$$f:R^3 \rightarrow R^2\ ;\ f(x,y,z)=(x-y,x+z)$$

والمطلوب:

1. أوجد: $[f^t(\emptyset)](x,y,z)$
2. ثم أوجد: $[f^t(\emptyset)](x,y,z)$ وذلك عندما :

$$f(x,y,z)\ =\ (x-y-z,2y-x)$$

الحل:

1) لدينا

$$\left[f^t(\Phi)\right](x,y)=\left(\Phi\circ f\right)(x,y,z)=\Phi\left(f(x,y,z)\right)=\Phi(x-y,x+z)$$
$$=3(x-y)-7(x+z)=-4x-3y-7z\ .$$

2) $$[f^t(\emptyset)](x,y,z)\ =\ \emptyset(\ f(\ x,y,x))$$

$$=\emptyset\ (x-y-z\ ,2y-x)$$

$$=3(\ x-y-z)\ -7\ (2y-x)$$

$$=10x-\ 17\ y\ -3z$$

مبرهنة (5−1):

ليكن $f:V\to U$ تطبيقاً خطياً، وليكن $f^t:U^*\to V^*$ منقول التطبيق f . عندئذ يكون: $\ker f^t=(\operatorname{Im} f)^O$

البرهان:

ليكن $\Phi\in\ker f^t$. عندئذ نجد أن $f^t(\Phi)=\Phi\circ f=0$. ليكن $u\in\operatorname{Im} f$ ، وبالتالي $u=f(v)$ ، حيث إن $v\in V$ ويكون:

$$\Phi(u)=\Phi\big(f(v)\big)=(\Phi\circ f)(v)=0(v)=0$$

إذاً $\Phi(u)=0$ لكل $u\in\operatorname{Im} f$ ، وبالتالي $\Phi\in(\operatorname{Im} f)^O$ ، ومنه نجد أن:

$$\ker f^t\subseteq(\operatorname{Im} f)^O,$$

العكس:

ليكن $\psi\in(\operatorname{Im} f)^O$ ، هذا يعني أن $\psi(\operatorname{Im} f)=0$. إذاً

$$\big(f^t(\psi)\big)(v)=(\psi\circ f)(v)=\psi\big(f(v)\big)=0=0(v)\ .$$

أي إن $\big(f^t(\psi)\big)(v)=0$ لكل $v\in V$ ، وبالتالي $f^t(\psi)=0$. هذا يعني أن $\psi\in\ker f^t$ ويكون $(\operatorname{Im} f)^O\subseteq\ker f^t$.

وبالتالي من الاحتوائين السابقين نجد أن $\ker f^t=(\operatorname{Im} f)^O$.

مبرهنة (5−2):

ليكن U و V فضاءين متجهيين على الحقل F ، وليكن $f:V\to U$ تطبيقاً خطياً، ولتكن A مصفوفة f بالنسبة للأساسين $\{v_i\}$, $\{u_i\}$ للفضاءين V و U على الترتيب. عندئذ تكون المصفوفة A^t ، وهي منقول المصفوفة A بالنسبة للأساسين الثنويين

$\{\psi_i\},\ \{\Phi_i\}$ للفضاءين $U^*,\ V^*$ على الترتيب، مصفوفة للتطبيق $f^t : U^* \to V^*$
.

البرهان:

ليكن $v \in V$ ... عندئذ نكتب:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \ ;\ \alpha_i \in F$$

إذا فرضنا أن:

$$f(v_1) = a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n \ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f(v_m) = a_{m1}u_1 + \ldots + a_{mn}u_n \ ,$$

عندئذ يكون:

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_m f(v_m) = \alpha_1(a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n) + \ldots + \\ &\quad + \alpha_m\left(a_{m1}u_1 + \ldots + a_{mn}u_n\right) \\ &= \left(\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_m a_{m1}\right)u_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{1n} + \ldots + \alpha_m a_{mn})u_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_1 a_{1i} + \ldots + \alpha_m a_{mi}\right)u_i \ . \end{aligned}$$

بالإضافة لذلك فإن:

$$\left(f^t(\psi_j)\right)(v) = \psi_j\left(f(v)\right) = \psi_j\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_1 a_{1i} + \ldots + \alpha_m a_{mi})u_i\right) = \alpha_1 a_{ij} + \ldots + \alpha_m a_{mj} \ ;$$
$$j = 1, 2, \ldots, n \ .$$

ولكن من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} \left(a_{1j}\Phi_1 + \ldots + a_{mj}\Phi_m\right)(v) &= \left(a_{1j}\Phi_1 + \ldots + a_{mj}\Phi_m\right)(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m) \\ &= \alpha_1 a_{1j} + \ldots + \alpha_m a_{mj} \ . \end{aligned}$$

بالمقارنة بين العلاقتين الأخيرتين نجد أن:

$$f^t(\psi_j) = a_{1j}\Phi_1 + ... + a_{mj}\Phi_m \;;\; j = 1,2,...,n \quad .$$

وهو المطلوب.

مثال (5−3):

ليكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل الآتي:

$$f(x,y) = \left(x+y \;,\; y \;,\; x-2y\right)$$

وليكن:

$$\left\{u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\right\} , \left\{v_1 = (1,1), v_2 = (-1,1)\right\}$$

أساسين للفضاءين $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ على الترتيب، والمطلوب:

1) أوجد ثنويي الأساسين $\{u_i\},\{v_i\}$.
2) أوجد P مصفوفة التطبيق f بالنسبة للأساسين $\{u_i\},\{v_i\}$ للفضاءين $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ على الترتيب.
3) أوجد Q مصفوفة التطبيق f^t بالنسبة للأساسين $\{\phi_i\},\{\psi_i\}$ للفضاءين الثنويين.
4) تأكد من صحة العلاقة $Q = \mathrm{P}^T$.

الحل: 1) ليكن

$$\Phi_1(x\;,y\;) = \alpha_1 x + \alpha_2 y \;,$$

$$\Phi_2(x\;,y\;) = \beta_1 x + \beta_2 y \;,$$

حيث

$\Phi_1(v_1) = 1$, $\Phi_1(v_2) = 0$، وبالتالي:

$$\Phi_1(v_1) = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \;\;,$$

$$\Phi_2(v_2) = \alpha_1 = 0 \;\;,$$

ومنه فإن $\alpha_1 = 0\ ,\ \alpha_2 = 1$. إذاً $\Phi_1(x,y) = y$. بالطريقة نفسها نجد أن $\Phi_2(x,y) = -x+y$ ، ومنه فإن $\{\Phi_1(x,y) = y\ ,\ \Phi_2(x,y) = -x+y\}$ تشكل أساساً للفضاء V^* . كذلك بنفس الطريقة نجد أن:

$$\{\psi_1(x,y,z) = z, \psi_2(x,y,z) = y, \psi_3(x,y,z) = x-y-z\}$$

يشكل أساساً للفضاء U^* .

2) لدينا

$$f(v_1) = f(1,1) = (2,1,-1) = -u_1 + u_2 + 2u_3\,;$$
$$f(v_2) = f(-1,0) = (-1,0,-1) = -u_1$$

وبالتالي فإن مصفوفة f بالنسبة للأساسين $\{u_i\},\{v_i\}$ تعطى بالشكل الآتي:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

3) لدينا

$$\left(f^t(\psi_1)\right)(v_1) = \left(f^t(\psi_1)\right)(x,y) = \left(\psi_1 \circ f\right)(x,y) =$$
$$= \psi_1\left(x+y\ ,\ \ y\ ,\ x-2y\right) = x-2y = -\Phi_1 - \Phi_2$$
$$\left(f^t(\psi_2)\right)(v_2) = \left(f^t(\psi_2)\right)(x,y) = \left(\psi_2 \circ f\right)(x,y) =$$
$$= \psi_2\left(x+y\ ,\ y\ ,\ x-2y\right) = y = \Phi_1$$

$$\left(f^t(\psi_3)\right)(x,y) = \left(\psi_3 \circ f\right)(x,y) = \psi_3(x+y\ ,\ y\ ,\ x-2y) = 2y = 2\Phi_1$$

وبالتالي تكون مصفوفة التطبيق f^t بالنسبة للأساسين $\{\Phi_i\},\{\psi_i\}$ من الشكل الآتي:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

4) نلاحظ أن:

$$P^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q.$$

مثال (4-5)

ليكن التطبيق الخطي:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \; ; \; f\ (x, y, z) = \ (x + 2z, -2x + y + x)$$

وليكن الشكل الخطي على R^2 :

$$Ø: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \; Ø(x, y) = \ 3x - 2y$$

والمطلوب:

1- أوجد $(f^t Ø)\ (x, y, z)$

2- أوجدفي $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ثنوية الأساسين:

$$B_1 = \{ v_1=(1,0,0), v_2=(0,1,0)\ , v_3=(0,0,1) \}$$

$$B_2 = \{ v_1`(1,0), v_2`(0,1) \}$$

3- عين f^t ثم أوجد مصفوفة f بالنسبة للأساسين B_1 , B_2 ومصفوفة f^tبالنسبة لثنويتهما.

الحل:

1- $(f^t Ø)\ (x, y, z) = \ Ø\ (f(x, y, z))$

$= Ø(x + 2z, -2x + y + z)$

$=3(x + 2z) \ - 2\ (-2x + y + x)$

$= 7x + 4z - 2y$

2- لتكن:

$B_1^* = \{ \emptyset_1,\emptyset_2,\emptyset_3 \},\ B_2^* =\{ \emptyset^`_1 ,\emptyset^`_2 \}$ثنوية كل من الأساسين B_2 , B_1 في

الفضاءين$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$وبفرض أن:

$$\emptyset_i(x, y, x) = \alpha x + \beta y + \gamma z \ ; \ i = 1,2,3$$

نجد:

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset_1(1,0,0) = \alpha = 1 \\ \emptyset_1(0,1,0) = \beta = 0 \\ \emptyset_1(0,0,1) = \gamma = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \emptyset_1(x,y,z)=x$$

وبصورة مشابهة نجد أن:

$$\emptyset_3(x,y,z) = z, \emptyset_2(x,y,z) = y$$

إذاً:

$$B_1^* = \{ x, y, z \}$$

ومن ناحية أخرى لدينا :

$$\emptyset^`_1(e^`_1) = 1 , \emptyset^`_1(e^`_2) = 0 \ ; \ i \neq j$$

وبفرض أن :

$$\emptyset^`_i = \alpha_i x + \beta_i y \ ; \ i = 1,2$$

يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset^`_1(1,0) = \alpha = 1 \\ \emptyset^`_1(0,1) = \beta = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \emptyset^`_1(x,y) = x$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$\emptyset^`_2(x,y) = y$$

وبالتالي فإن:

$$B_2^* = \{ x,y \}$$

3- حسب مبرهنة سابقة كل شكل خطي: $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

يكتب بالشكل:

$$\psi\sum_{i=1}^{2}\psi\ (\grave{e_i})\grave{\emptyset_i}$$

حيث:

$$\psi(\grave{e_1}),\psi(\grave{e_2})\epsilon\ \mathbb{R}$$

ولتكن:

$$\psi(\grave{e_1})=\lambda,\qquad \psi(\grave{e_2})=\mu$$

حيث : $\lambda\ ,\ \mu\ \epsilon\mathbb{R}$

فإن:

$$\psi\ =\ \lambda x+\ \mu\, y$$

إن: $f^{t}:U^{*}\rightarrow V^{*}$

وقاعدة اقترانه هي بالتعريف:

$$(\,f^{t}\psi)\ (v)=(\ \psi\ _{0}f\ )\ (v)\quad ;\ v\epsilon V$$

أي أن :

$$f^{t}:(\mathbb{R}^{2})^{*}\rightarrow(\mathbb{R}^{3})^{*}$$

$$(f^{t}\psi)\ (\ x,y,z)=(\ \psi_{0}f)\ (x,\mathrm{y},\mathrm{z})=\psi\ (f(\ x,y,z))$$

$$=\psi(x+2\mathrm{z}\ ,-2x+y+\mathrm{z}\ )$$

$$=\lambda(x+2\mathrm{z})+\mu(-2x+y+\mathrm{z})$$

$$=(\lambda\ -2\mu)\ x+\mu y+(2\lambda+\mu)\ \mathrm{z}$$

إذاً :

$$f^{t}:(\mathrm{R}^{2})^{*}\rightarrow(\mathrm{R}^{3})^{*}\ ;\ \lambda x+\mu\ y\rightarrow(\lambda\ -2\mu)\ x+\mu\mathrm{y}+(2\lambda+\mu)z$$

4- لدينا :

$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,2) = 1(1,0) - 2(0,1) \\ f(0,1,0) &= (0,+1) = 0(1,0) + 1(0,1) \\ f(0,0,1) &= (2,+1) = +2(1,0) + 1(0,1) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

فإن مصفوفة f بالنسبة للأساسين B_1 , B_2 هي

$$[f]_{B_1}^{B_2} = A(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بينما مصفوفة f^t بالنسبة لثنويتي الأساسين B_2^* ، B_1^* للفضاين U^*, V^* هي:

$$A(f^t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A_{V^*}^{U^*}(f^t)$$

لأن :

$$f^t(\emptyset_1') = f^t(x) = x + 2z = 1.\emptyset_1 + 0\emptyset_2 + 2\emptyset_3$$

$$f^t(\emptyset_2') = f^t(y) = -2x + y + z = -2.\emptyset_1 + 1\emptyset_2 + 1\emptyset_3$$

لاحظ هنا أن:

$$A(f^t) = (A(f))^t.$$

تمارين محلولة

1–ليكن $\mathrm{V} = M_n(F)$ الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة من المرتبة n على الحقل F ، وليكن التطبيق:

$$\Phi : M_n(F) \to F : \Phi(A) = \det A$$

هل يشكل Φ شكلاً خطياً على V ؟

الحل:

إن Φ لا يشكل شكلاً خطياً على V ، وذلك لأنه إذا كان لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

فإنه من جهة أولى $\Phi(A) = \Phi(B) = 0$ ومن جهة أخرى فإن:

$$\Phi(A+B) = \Phi(I) = \det I = 1 \neq \Phi(A) + \Phi(B)$$

إذاً Φ لا يشكل شكلاً خطياً على V .

2–أوجد الأساس الثنوي للأساس القانوني:

$\{e_1 = (1,0,0) , e_2 = (0,1,0) , e_3 = (0,0,1)\}$ للفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل:

لدينا

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &= x \\ \Phi_2(x,y,z) &= y \\ \Phi_3(x,y,z) &= z \end{aligned}$$

ويكون الأساس الثنوي هو:

$$.\{\Phi_1(x,y,z)=x,\Phi_2(x,y,z)=y,\Phi_3(x,y,z)=z\}$$

3–أوجد الأساس الثنوي للأساس:

$$\{v_1=(-1,2,-3),v_2=(-1,1,-1),v_3=(-2,4,-7)\}$$

للفضاء $\mathbb{R}^3$

الحل:

ليكن $\Phi_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ الأساس الممثل بالمصفوفة السطرية. لدينا:

$$\Phi_1(v_1)=1\ ,\ \Phi_1(v_2)=0\ ,\ \Phi_1(v_3)=0\ .$$

ومنه نجد أن:

$$\Phi_1(v_1)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}=-\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3=1\ ,$$

$$\Phi_1(v_2)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}=-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\ ,$$

$$\Phi_1(v_3)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\\-7\end{bmatrix}=-2\alpha_1+4\alpha_2-7\alpha_3=0\ .$$

وبالتالي يكون:. $\alpha_1=3\ ,\ \alpha_2=5\ ,\ \alpha_3=2$

أي أن $\Phi_1=(3,5,2)$ ومنه فإن $\Phi_1(x,y,z)=3x+5y+2z$.

ليكن $\Phi_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ الأساس الثنوي الممثل بالمصفوفة السطرية.

لدينا: $\Phi_2(v_1)=0\ ,\ \Phi_2(v_2)=1\ ,\ \Phi_2(v_3)=0$,

وبالتالي نجد أن:

$$\Phi_2(v_1)=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}=-\beta_1+2\beta_2-3\beta_3=0\ ,$$

$$\Phi_2(v_2)=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}=-\beta_1+\beta_2-\beta_3=1\ ,$$

$$\Phi_2(v_3)=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\\-7\end{bmatrix}=-2\beta_1+4\beta_2-7\beta_3=0\ .$$

وبالتالي يكون: $\beta_1=-2\ ,\ \beta_2=-1\ ,\ \beta_3=0$,

أي أن $\Phi_2=(-2,-1,0)$ ومنه فإن: $\Phi_2(x,y,z)=-2x-y$.

أخيراً ليكن $\Phi_3=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ الأساس الثنوي الممثل بالمصفوفة السطرية.

لدينا $\Phi_3(v_1)=0\ ,\ \Phi_3(v_2)=0\ ,\ \Phi_3(v_3)=1$, وبالتالي نجد أن

$$\Phi_3(v_1)=\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}=-\gamma_1+2\gamma_2-3\gamma_3=0\ ;$$

$$\Phi_3(v_2)=\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}=-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3=0\ ;$$

$$\Phi_3(v_3)=\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\\-7\end{bmatrix}=-2\gamma_1+4\gamma_2-7\gamma_3=1\ ,$$

وبالتالي يكون: $\gamma_1 = -1 , \gamma_2 = -2 , \gamma_3 = -1$

أي أن $\Phi_3 = (-1,-2,-1)$ ومنه فإن: $\Phi_3(x,y,z) = -x-2y-z$.

4-أوجد الأساس الثنوي للأساس

$$\{v_1 = (1,-1,3) , v_2 = (0,1,-1) , v_3 = (0,3,-2)\}$$

للفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل:

نريد إيجاد الأشكال الخطية

$$\Phi_1(x,y,z) = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \; ; \; \Phi_2(x,y,z) = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \; ;$$
$$\Phi_3(x,y,z) = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \; ,$$

بحيث يكون: $\Phi_1(v_1) = 1 , \Phi_1(v_2) = 0 , \Phi_1(v_3) = 0$,

$$\Phi_1(v_1) = \Phi_1(1,-1,3) = \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \; ,$$
$$\Phi_1(v_2) = \Phi_1(0,1,-1) = \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \; ,$$
$$\Phi_1(v_3) = \Phi_1(0,3,-2) = 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \; .$$

بحل جملة المعادلات نجد أن:

$$\alpha_1 = 1 , \alpha_2 = 0 , \alpha_3 = 0$$

ومنه فإن: $\Phi_1(x,y,z) = x$.

كذلك بما أن: $\Phi_2(v_1) = 0 , \Phi_2(v_2) = 1 , \Phi_2(v_3) = 0$. فإن:

$$\Phi_2(v_1) = \Phi_2(1,-1,3) = \beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3 = 0 \; ,$$
$$\Phi_2(v_2) = \Phi_2(0,1,-1) = \beta_2 - \beta_3 = 1 \; ,$$
$$\Phi_2(v_3) = \Phi_2(0,3,-2) = 3\beta_2 - 2\beta_3 = 0 \; .$$

بحل جملة المعادلات نجد أن:

$$\beta_1 = 7 \,,\, \beta_2 = -2 \,,\, \beta_3 = -3$$

ومنه فإن $\Phi_2\left(x, y, z\right) = 7x - 2y - 3z$.

كذلك أخيراً بما أن $\Phi_3(v_1) = 0 \,,\, \Phi_3(v_2) = 0 \,,\, \Phi_3(v_3) = 1$ فإن:

$$\Phi_3(v_1) = \Phi_3(1,-1,3) = \gamma_1 - \gamma_2 + 3\gamma_3 = 0 \,,$$
$$\Phi_3(v_2) = \Phi_3(0,1,-1) = \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \,,$$
$$\Phi_3(v_3) = \Phi_3(0,3,-2) = 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 1 \,.$$

بحل جملة المعادلات نجد أن:

$$\gamma_1 = -2 \,,\, \gamma_2 = 1 \,,\, \gamma_3 = 1$$

ومنه فإن: $\Phi_3\left(x, y, z\right) = -2x + y + z$.

5– ليكن $V = \mathbb{R}^2$ وليكن:

$$B' = \left\{ v_1' = (4,3), v_2' = (3,2) \right\} ,\, B = \left\{ v_1 = (1,1), v_2 = (1,0) \right\}$$

أساسين في الفضاء $\mathbb{R}^2$ والمطلوب:

1) أوجد الأساسين الثنويين B'^*, B^* للأساسين B', B على الترتيب.
2) أوجد مصفوفة الانتقال P من الأساس B إلى B' ومصفوفة الانتقال Q من الأساس B^* إلى B'^* .
3) تأكد من صحة العلاقة $Q = \left(\mathrm{P}^{-1}\right)^T$.

الحل:

1) ليكن $\Phi_1 = \left(\alpha_1, \alpha_2\right)$. بما أن $\Phi_1(v_1) = 1 \,,\, \Phi_1(v_2) = 0$ ، وبالتالي:

$$\Phi_1(v_1) = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \,,$$
$$\Phi_1(v_2) = \alpha_1 = 0 \,.$$

وبالتالي يكون $\alpha_1 = 0 , \alpha_2 = 1$ ويكون $\Phi_1 = (0,1) = y$.

بالطريقة نفسها نجد أن: $\Phi_2 = (1,-1) = x - y$

إذاً $B^* = \{y, x-y\}$.

ليكن $\Phi'_1 = (\beta_1, \beta_2)$. بما أن $\Phi'_1(v'_1) = 1 , \Phi'_1(v'_2) = 0$ وبالتالي:

$$\Phi'_1(v'_1) = \Phi'_1(4,3) = 4\beta_1 + 3\beta_2 = 1 ,$$
$$\Phi'_1(v'_2) = \Phi'_2(3,2) = 3\beta_1 + 2\beta_2 = 0 .$$

وبالتالي يكون $\beta_1 = -2 , \beta_2 = 3$ ويكون $\Phi'_1 = (-2,3) = -2x + 3y$. بالطريقة نفسها نجد أن: $\Phi'_2 = (3,-4) = 3x - 4y$

إذاً $B'^* = \{-2x+3y, 3x-4y\}$.

2) لدينا $v'_1 = (3,4) = x(1,1) + y(1,0) = (x+y, x)$، ويكون $x = 3 , x+y = 4$ ومنه فإن $x = 3 , y = 1$، إذاً $v'_1 = 3v_1 + v_2$ وأيضاً يكون $v'_2 = 2v_1 + v_2$.

ومصفوفة الانتقال P تكتب بالشكل الآتي:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

أيضاً لدينا $\Phi'_1 = (-2,3) = x(0,1) + y(1,-1) = (y, x-y)$ ، ومنه $x = 1 , y = -2$. إذاً $\Phi'_1 = \Phi_1 - 2\Phi_2$ ويكون أيضاً $\Phi'_2 = -\Phi_1 + 3\Phi_2$. ومنه نجد:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} ,$$

3) نوجد P^{-1}

$$\mathrm{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix};$$

ومنه

$$\left(\mathrm{P}^{-1}\right)^{T}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}=Q$$

6–ليكن $V=\mathbb{R}^4$ وليكن U فضاءً جزئياً من V معطى بالشكل الآتي:

$$U=\left\{u_1=(2,4-6,8),u_2=(0,2,8,-2)\right\}$$

أوجد أساساً للفضاء U^O .

الحل:

ليكن $\psi\in U^O$ ... عندئذ يكون $\psi(u)=0$ لكل $u\in U$ ، وبالتالي:

$$\psi(x,y,z,t)=\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4 t\ .$$

بما أن: $\psi(u_1)=\psi(u_2)=0$ ، أي أن:

$$\psi(2,4,-6,8)=2\alpha_1+4\alpha_2-6\alpha_3+8\alpha_4=0\ ,$$
$$\psi(0,2,8,-2)=2\alpha_2+8\alpha_3-2\alpha_4=0\ .$$

نضع $\alpha_3=1,\alpha_4=0$ فيكون $\alpha_1=11,\alpha_2=-4$ ، وبالتالي نحصل على الشكل الخطي: $\psi_1(x,y,z,t)=11x-4y+z$.

نضع $\alpha_3=0,\alpha_4=1$ فيكون $\alpha_1=6,\alpha_2=-1$ ، وبالتالي نحصل على الشكل الخطي: $\psi_2(x,y,z,t)=6x-y-t$,

ويكون أساس الفضاء U^O له الشكل: $\left\{\psi_1=11x-4y+z\ ,\ \psi_2=6x-y-t\right\}$

7–ليكن الشكل الخطي $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ معطى بالعلاقة الآتية $\Phi(x,y)=x+2y$ ،
وليكن المؤثر الخطي $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ معطى بالعلاقة $f(x,y)=(0,y)$. والمطلوب:

أوجد $\left[f^t(\Phi) \right](x,y)$.

الحل:

نلاحظ أن:

$$\left[f^t(\Phi) \right](x,y) = \left(\Phi \circ f\right)(x,y) = \Phi\left(f(x,y)\right) = \Phi(0,y) = 2y \ .$$

8–ليكن الشكل الخطي $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معطى بالشكل $\Phi(x,y) = x - 5y$ ، وليكن المؤثر الخطي $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالشكل $f(x,y,z) = (x+y, -5z)$ والمطلوب:

أوجد $\left[f^t(\Phi) \right](x,y,z)$.

الحل:

لدينا:

$$\left[f^t(\Phi) \right](x,y,z) = \left(\Phi \circ f\right)(x,y,z) = \Phi\left(f(x,y,z)\right) = \Phi(x+y, -5z) =$$
$$= x + y - 5\left(-5z\right) = x + y + 25z$$

9–ليكن V و U فضاءين متجهين منتهيي البعد، وليكن التطبيق الخطي $f : \mathrm{V} \to U$ ، بين أن:

$$\text{rank}\left[f \right] = \text{rank}\left[f^t \right] \ .$$

الحل:

ليكن $\dim \mathrm{V} = n \ , \ \dim U = m$ ، وليكن $\text{rank}\left[f \right] = r$ وبالتالي يكون:

$$\dim\left(\text{Im}\, f\right)^O = \dim U - \dim\left(\text{Im}\, f\right) = m - \text{rank}\left[f \right] = m - r$$

حسب المبرهنة (5–1) لدينا $\ker f^t = \left(\text{Im}\, f\right)^O$ وبالتالي فإن $\left(f^t\right) = m - r$ صفرية

ومنه نجد أن:

$$\text{rank}\left[f^t \right] = \dim U^* - \text{nullity}\left(f^t\right) = m - (m - r) = r = \text{rank}\left[f \right]$$

-10 ليكن التطبيق الخطي: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

والمعرف بالشكل: $f(x,y) = (x+y, y, x-2y)$

وليكن:

$B_1 = \{ u_1 = (1,1) , u_2 = (1,0) \}$,

$B_2 = \{ u_1^` = (1,0,1) , u_2^` = (1,1,0), u_3^` = (1,0,0) \}$

أساسين في $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ على الترتيب والمطلوب:

-1 أحسب B_2^* ، B_1^*.

-2 أوجد المصفوفة A للتطبيق f بالنسبة للأساسين B_1 , B_2 ثم أوجد المصفوفة Q لمنقول التطبيق f بالنسبة للأساسين الثنويين B_2^* ، B_1^* على الترتيب .

-3 حقق صحة العلاقة $Q = A^t$

الحل:

-1 لتكن $B_2^* = \{\emptyset_1^`, \acute{\emptyset}_2, \acute{\emptyset}_3\}$, $B_1^* = \{ \emptyset 1, \emptyset_2 \}$ ثنوية كل من الأساسين B_1, B_2 وبفرض أن:

$\emptyset_i(x, y) = \alpha x + \beta y$ حيث i=1,2

نجد

$$\left.\begin{aligned} \emptyset_1(1,1) = \alpha + \beta = 1 \\ \emptyset_1(-1,0) = -\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha = 0 , \beta = 1$$

ومنه نجد أن: $\emptyset_1(x, y) = y$

وبطريقة مشابهة نجد أن: $\emptyset_2(x, y) = -x + y$

إذاً: $B_1^* = \{ y, -x + y \}$

بفرض أن

$$\emptyset_i(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z , \quad i = 1,2,3$$

وأن :

$$\grave{\emptyset}_1(\grave{u}_1) = 1\ ,\grave{\emptyset}_1(\grave{u}_2) = 0, \grave{\emptyset}_1(\grave{u}_3) = 0$$

فإن :

$$\left.\begin{array}{l}\grave{\emptyset}_1(1,0,1) = \alpha + \gamma = 1 \\ \grave{\emptyset}_1(1,1,0) = \alpha + \beta = 0 \\ \grave{\emptyset}_1(1,0,0) = \alpha \qquad = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0\ , \gamma = 1$$

ومنه: $\grave{\emptyset}_1(x,y,z) = z$

وبصورة مشابهة تماماً نحصل على:

$$\grave{\emptyset}_2(x,y,z) = y$$

$$\grave{\emptyset}_3(x,y,z) = x - y - z$$

إذاً: $B_2^* = \{\, z, y, x - y - z \,\}$

2- مصفوفة f بالنسبة للأساسين B_1 , B_2 هي:

$$\left.\begin{array}{l} f\,(1,1) = (2,1,-1) = -1u`_1 + 1u`_2 + 2u`_3 \\ f(-1,0) = (-1,0,-1) = -1u`_1 + 0u`_2 + 0u`_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- الآن نوجد المصفوفة Q :

$$\left(f^t(\grave{\emptyset}_1)\right)(x,y) = \grave{\emptyset}_1\left(f(x,y)\right) = \grave{\emptyset}_1(x+y, y, x-2y) = x - 2y$$
$$= -\emptyset_1 - \emptyset_2$$

$$\left(f^t(\grave{\emptyset}_2)\right)(x,y) = \grave{\emptyset}_2\left(f(x,y)\right) = \grave{\emptyset}_2(x+y, y, x-2y) = y$$
$$= -\emptyset_1 + 0\emptyset_2$$

$$\left(f^t(\grave{\emptyset}_3)\right)(x,y) = \grave{\emptyset}_3\left(f(x,y)\right) = \grave{\emptyset}_3(x+y, y, x-2y) = 2y$$
$$= 2\emptyset_1 + 0\emptyset_2$$

وبالتالي فإن:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3- نعلم أن $Q = P^T$ وبالتالي:

$$P^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

تمارين غير محلولة

1–ليكن $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$، $\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ و شكلين خطيين معرفين بالشكلين:

$\Phi(x,y)=2x-3y$ و $\Psi(x,y)=5x+2y$.

والمطلوب: أوجد $-2\Phi\ ,\ 7\Phi+2\Psi\ ,\ 3\Phi+\Psi$.

2–ليكن $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ و $\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ شكلين خطيين معرفين بالشكلين:

$\Phi(x,y,z)=-x+y-z$ و $\Psi(x,y,z)=2x+y-2z$.

والمطلوب أوجد: $2\Phi\ ,\ 5\Phi-2\Psi\ ,\ 2\Phi-\Psi$.

3– لتكن الأساسات الآتية للفضاء $\mathbb{R}^2$.

$$\{v_1=(1,2)\ ,\ v_2=(2,3)\}\ ,\ \{v_1=(2\ 1)\ ,\ v_2=(3,1)\}$$

أوجد الأساسات الثنوية $\{\Phi_1\ ,\ \Phi_2\}$ لكل منها.

4–ليكن:

$$A=\{v_1=(1,0,1),v_2=(1,-1,1),v_3=(-1,0,0)\}\ ,$$
$$B=\{u_1=(1,1,1),u_2=(1,1,0),v_3=(1,0,0)\}\ .$$

أساسين للفضاء $\mathbb{R}^3$ وليكن $A^*=\{\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3\}$ و $B^*=\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$ الأساسين الثنويين على الترتيب. والمطلوب:

1) أوجد مصفوفة الانتقال P من الأساس A إلى الأساس B .
2) أوجد مصفوفة الانتقال Q من الأساس A^* إلى الأساس B^* .
3) تأكد من صحة العلاقة: $P^T=Q$.

5–ليكن $V=\mathbb{R}^4$ وليكن U فضاءً جزئياً من الفضاء V مولداً بالمجموعة:

$$\{(1,2,3,4),(1,3,-2,6),(1,4,-1,8)\}$$

أوجد أساساً لعادم U .

6- ليكن التطبيق الخطي $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ والمعرف بالشكل:

$\varphi(x,y,z)=\ (x+y,z-2x)$ والمطلوب:

1) احسب ثنويي الأساسين النظاميين في $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$.
2) احسب P,Q مصفوفتي كل من φ,φ^t على الترتيب وحقق صحة العلاقة $P^T=Q$.

7–ليكن $V=\mathbb{R}^4$ وليكن U فضاءً جزئياً من V مولداً بالمجموعة:

$$\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$$

أوجد أساساً لعادم U.

8–ليكن $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل:

$$f(x,y,z,t)=(x-y+t\ ,\ z-2t\ ,\ x+2z)$$

وليكن

$$\{v_1=(1,1,1,1),v_2=(1,1,1,0),v_3=(1,1,0,0),v_4=(1,0,0,0)\}\ ,$$
$$\{u_1=(1,0,1),u_2=(0,-1,1),u_3=(1,0,0)\}\ .$$

والمطلوب:

1) أوجد ثنويي الأساسين $\{u_i\},\{v_i\}$.
2) أوجد P مصفوفة التطبيق f بالنسبة للأساسين $\{u_i\},\{v_i\}$ للفضاءين $\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3$ على الترتيب.
3) أوجد Q مصفوفة التطبيق f^t بالنسبة للأساسين $\{\Phi_i\},\{\psi_i\}$ للفضاءين الثنويين.
4) تأكد من صحة العلاقة $Q=P^T$.

9- إذا كانت $\varphi, \psi \in Hom\ (v, v)$, برهن أن:

1) $(\varphi + \psi)^t = \varphi^t + \psi^t$

2) $(\alpha\varphi)^t = \alpha\varphi^t\ ; v\ \alpha\ \in k$

10- إذا كانت V_1, V_2, V_3 ثلاثة فضاءات متجهة على الحقل k وليكن:

$$\varphi \epsilon\ Hom\ (V_1, V_2)\ , \qquad \psi \epsilon\ Hom\ (V_2, V_3)$$

عندها برهن أن: $(\psi o \varphi)^t = \varphi^t o\ \psi^t$

11- إذا كانت V_1, V_2 فضاءين متجهين على الحقل k و

$\varphi \epsilon\ Hom\ (V_1, V_2)$ والمطلوب برهن أن:

-1 $(Im\ \varphi)^o = ker\varphi^t$

-2 $ker\varphi = (\ Im\varphi^t)^0$

12- ليكن $\varphi\ \in\ Hom\ (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ والمعرف بالشكل:

$$\varphi(x, y, z, t) = (x - y + t, z - 2t, x + 2z)$$

والأساسان فيه:

$$A = \{v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,1,0), v_3(1,1,0,0), v_4 = (1,0,0,0)\}$$

$$B = \{v_1^` = (1,0,1), v_2^` = (0, -1,1), v_3^` = (1,0,0)\}$$

والمطلوب:

1) احسب A^* , B^*.
2) احسب Pمصفوفة الانتقال بالنسبة للأساسين A,B .
ثم احسب مصفوفة φ^t بالنسبة للأساسين A^* , B^*.
3) حقق صحة العلاقة : $Q= P^T$.

13- ليكن الفضاء المتجهي$\mathbb{R}^3$والأساسان فيه :

$$A = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (1, -1,1), v_3(-1,0,0)\}$$

$$B = \{v_1^` = (1,1,1), v_2^` = (1,1,0), v_3^` = (1,0,0)\}$$

كما ولتكن ثنوتياهما:

$$A^* = \{\emptyset_1, \emptyset_1, \emptyset_3\}, B^* = \{\emptyset\grave{}_1, \emptyset\grave{}_2, \emptyset\grave{}_3\}$$

1. احسب P مصفوفة الانتقال من A إلى B ثم المصفوفة Q مصفوفة الانتقال من A^* إلى B^*.
2. حقق صحة العلاقة $Q = (P^T)^{-1}$.

-14 إذا كانت $A = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3(1,0,0)\}$ أساساً في الفضاء $\mathbb{R}^3$والمطلوب:

1) أوجد ثنوية الأساس A أي أوجد A^*.
2) برهن أن $B^* = \{\emptyset_1, \emptyset_1, \emptyset_3\}$ أساس الفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$.
علماً أن:

$\emptyset_1(x,y,z)= x +3y+4z$, $\emptyset_2(x,y,z)= 2x +2y+z$,$\emptyset_3(x,y,z)= x +2y+2z$

3) أحسب إحداثيات $\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3$ بالنسبة للأساس A^*, ثم أوجد الأساس B للفضاء V الذي ثنويته B^*.

-15 أوجد أساس لـــ W^0, حيث W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$ معين بالشكل:

$$W = \{(x,y,z,t) \in R^4; x - y + 2z + t = 0, x + 2y - z + t = 0\}$$

-16 أوجد أساس لـــ V^0 في الحالات التالية:

1) $V = \{(1,2,-2,4), (1,1,1,0), (2,3,-1,10)\}$

2) $V = \{(2,0,-3,6), (2,1,0,4), (0,1,3,-2)\}$

3) $V = \{(1,0,1,0), (2,-3,-4,1), (1,1,-3,0)\}$

الفصل السادس

الأشكال ثنائية الخطية والتربيعية والهرمتية

Bilinear, QudraticandHermitian Forms

(6−1) مفهوم الشكل ثنائي الخطية

The concept of a Bilinear Form

نعرف مفهوم الشكل ثنائي الخطية على فضاء متجهيV على حقل F، بمعنى أننا ندرس تطبيقاً عددياً يقرن المتجهين $u, v \in V$ بعدد من الحقل F، أي أن:

$$f: V \times V \longrightarrow F$$

يعطى بالعلاقة

$$(u, v) \longmapsto f(u, v)$$

تعريف (1−1):

نسمي التطبيق $f: V \times V \longrightarrow F$ الذي يحقق مايلي:

1) $f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 f(u_1, v) + \alpha_2 f(u_2, v)$

2) $f(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 f(u, v_1) + \beta_2 f(u, v_2)$

لكل $\alpha_i, \beta_i \in F$و لكل $u_i, v_i \in V$، شكل ثنائي الخطية على الفضاء V.

كما نعبر عن الشرط 1) بأن نقول إن f خطي بالنسبة للمتجه u و كذلك الشرط 2) بأن f خطي بالنسبة للمتجه v.

مثال(1−1):

ليكن f الجداء الداخلي على $\mathbb{R}^n$، أي أن:

$$f(u,v) = u.v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$$

حيث $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و$v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. عندئذٍ واضح أن f شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^n$، لأن f خطي بالنسبة لـ u و خطي بالنسبة لـ v.

مثال(1−2): ليكن $C[0,1]$فضاء الدوال المستمرة على المجال $[0,1]$،ولتكن $h(s,t)$دالة مستمرة بالمتحولين t, s. نعرف

$$\phi: (f,g) \longrightarrow \int_0^1 \int_0^1 h(s,t)\, f(s)\, g(t)\, ds\, dt$$

ينتج بسهولة أن التطبيق $\phi(f,g)$ شكل ثنائي الخطية بالمتحولين u, v.

ليكن: $h(s,t) = 1$

عندئذٍ يكون:

$$\phi(f,g) = \int_0^1 \int_0^1 f(s)\, g(t)\, ds\, dt = \int_0^1 f(s)\, ds \int_0^1 g(t)\, dt$$

و يكون التطبيق $f(u,v)$ جداء شكلين خطيين.

مثال(1−3):

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n على حقل F. نبين أن التطبيق:

$$\mathrm{f}(X,Y) = X^{\mathrm{T}} A X;\ \ X, Y \in F^n$$

شكل ثنائي الخطية.

الحل:

لدينا

$$\mathrm{f}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y) = (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)^{\mathrm{T}} A\, Y =$$

$$= \left(\alpha_1 {X_1}^{\mathrm{T}} + \alpha_2 {X_2}^{\mathrm{T}}\right) A\, Y = \alpha_1 X_1^T AY + \alpha_2 X_2^T Y =$$

$$= \alpha_1 f(X_1, Y) + \alpha_2 f(X_2, Y)$$

و كذلك

$$\mathrm{f}(X, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2) = X^{\mathrm{T}} A\, (\beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2)$$

$$= \beta_1 X^{\mathrm{T}} A Y_1 + \beta_2 X^{\mathrm{T}} A Y_2$$

$$= \beta_1 f(X, Y_1) + \beta_2 f(X, Y_2)$$

و ذلك لكل $\alpha_i, \beta_i \in F$ و $X_i, Y_i \in F^n$،وبالتالي فإن fخطي بالمتحول الأول وكذلك خطي بالمتحول الثاني، أي أن fشكل ثنائي الخطية على الفضاء F^n.

مثال(1−4):

ليكنh و gشكلين خطيين على فضاء متجهي V على حقل F. بين أن

التطبيق$f: V \times V \to F$المعرف بالعلاقة:

$$f(u, v) = h(u) g(v)$$

شكل ثنائي الخطية.

الحل:

لدينا:

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = h(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) g(v) =$$

$$= \big(\alpha_1 h(u_1) + \alpha_2 h(u_2)\big) g(v) = \alpha_1 h(u_1)\, g(v) +$$

$$+\alpha_2 h(u_2)\, g(v) = \alpha_1 f(u_1, v) + \alpha_2 f(u_2, v).$$

وكذلك

$$f(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = h(u)\, g(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$$

$$= h(u)\big(\beta_1 g(v_1) + \beta_2 g(v_2)\big) = \beta_1 h(u) g(v_1) +$$

$$+\beta_2 h(u) g(v_2) = \beta_1 f(u, v_1) + \beta_2 f(u, v_2).$$

و ذلك لكل $\alpha_i, \beta_i \in F$ و $u_i, v_i \in V$.

وبالتالي فإن fشكل ثنائي الخطية على الفضاءV.

ثمة سؤال يطرح وهو: أنه إذا كان المتجهان u, vمعبر عنهما بدلالة مركباتهما بالنسبة لأساس معطى $\{e_1, \dots, e_n\}$للفضاء V على حقل F، بحيث:

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

فكيف نعبر عن الشكل ثنائي الخطية بدلالة المركبات$x_1, \dots, x_n$ و$y_1, \dots, y_n$

للمتجهين uv و على الترتيب.

إن الجواب على هذا السؤال بسيط جداً ونعبر عنه بما يلي:

$$f(u,v) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, y_1e_1 + +y_2e_2 + \cdots + y_ne_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\, f(e_i,e_j) \qquad (1-1)$$

نضع $f(e_i,e_j) = a_{ij}$.عندئذٍ العلاقة $(1-1)$ تصبح على الشكل:

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_iy_j; \quad a_{ij} \in F \qquad (1-2)$$

تعريف (2-1):

تسمى المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بمصفوفة الشكل ثنائي الخطية $(1-2)$ بالنسبة للأساس$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

للفضاء المتجهيV على حقل F.

يبرهن بسهولة بضرب المصفوفات المقابلة أن:

$$f(u,v) = X^T AY,$$

حيث X و Yأعمدة مؤلفة من المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ و$y_1, y_2, \dots, y_n$للمتجهين

u و v على الترتيب، أي أننا نستطيع اعتبار الشكل ثنائي الخطية كجداء مصفوفي،

وهذا هو الشكل العام للشكل ثنائي الخطية على الفضاءالمتجهي المنتهي البعد على حقل F.

مثال(1-5):

ليكن $V = \mathbb{R}^3$ فضاءً متجهياً على الحقل $\mathbb{R}$. نعرف على Vشكل ثنائي الخطية

$$f(u,v) = 2x_1y_1 + 5x_1y_2 - 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_2 + 3x_3y_3$$

اكتب f على شكل مصفوفي.

الحل: إن:

$$f(u,v)=X^TAY=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2 & 5 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}.$$

مثال(1−6):

ليكن $V=\mathbb{R}^2$ فضاءًمتجهياً على الحقل $\mathbb{R}$. نعرف الشكل ثنائي الخطية على Vكما يلي:

$$f(u,v)=-3x_1y_1+2x_1y_2-5x_2y_1-2x_2y_2$$

أوجد مصفوفة الشكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ بالنسبة للأساس القانوني في الفضاء V.

الحل:

لدينا من العلاقة $f\left(e_i,e_j\right)=a_{ij}$ مايلي:

$$f(e_1,e_1)=a_{11}=-3\,,\qquad f(e_1,e_2)=a_{12}=2$$
$$f(e_2,e_1)=a_{21}=-5\,,\qquad f(e_2,e_2)=a_{22}=-2$$

و تكون المصفوفة المطلوبة

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -5 & -2\end{bmatrix}$$

مثال(1−7):

اكتب الشكل ثنائي الخطية على $\mathbb{C}^2$ والذي مصفوفته :

$A=\begin{bmatrix}-2 & 1+i\\ 2i & 4-i\end{bmatrix}$ بالنسبة للأساس النظامي في$\mathbb{C}^2$.

الحل:

نأخذ $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$ ومنه:

$$X^TA.Y=\ [x_1\,,x_2]\begin{bmatrix}-2 & 1+i\\ 2i & 4-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$
$$=\ -2x_1y_1+2ix_2y_1+(1+i)x_1y_2+(4-i)x_2y_2$$

(2−6) تغير مصفوفة الشكل ثنائي الخطية و رتبة الشكل ثنائي الخطية:

Transformation of a Matrix and rank of a Bilinear Form

مما سبق نجد أنه لتمديد شكل ثنائي الخطية يلزمنا تحديد مصفوفته ويظهر هنا مباشرةً السؤال:

كيف تصبح Aمصفوفة الشكل ثنائي الخطية عند الانتقال من الأساس $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ للفضاء V على حقل F إلى أساس آخر $\{\acute{e}_1, \acute{e}_2, \dots, \acute{e}_n\}$ لذلك الفضاء؟

يكمن الجواب على تساؤلنا في المبرهنة الآتية:

مبرهنة(2−1):

ليكن V فضاءً متجهياً على حقل F و ليكن الشكل ثنائي الخطية الآتي:

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j;$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,, v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

مصفوفته في الأساس $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ هي A،وليكن:

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \acute{a}_{ij} \acute{x}_i \acute{y}_j;$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} \acute{x}_i \acute{e}_i\,, v = \sum_{j=1}^{n} \acute{y}_j \acute{e}_j$$

مصفوفته في الأساس $\acute{e}_1, \acute{e}_2, \dots, \acute{e}_n$ هي $\acute{A}$.

و ليكن:

$$\acute{e}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k\,,\ \ j = 1,2,\dots,n$$

نعتبر

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

لدينا

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \acute{x}_k\,, j = 1,2,\dots,n \qquad (2-1)$$

عندئذٍ تكون العلاقة التالية:

$$\acute{A} = C^T A C, \qquad (2-2)$$

صحيحة، C^{T}منقول المصفوفة C.

البرهان:

لتكن:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

مصفوفتي العمود ولتكن X^{T}مصفوفة السطر $[x_1 x_2 \dots\ x_n]$.بضرب المصفوفتين

A و Yنجد أن:

$$Ay = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة عمود، ومن جديد نضرب المصفوفة X^{T} بالمصفوفة Ay فنجد أن المصفوفة $X^T AY$ تكون مؤلفة من سطر وعمود واحد، أي أنها مؤلفة من عنصر واحد

$$x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) + x_2(a_{21}y_2 + a_{22}y_2 + \\ + \cdots + a_{2n}y_n) + \ldots + x_n(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n).$$

والعلاقة الأخيرة ما هي إلا شكل ثنائي الخطية $f(u,v)$، أي أن:

$$f(u,v) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = X^T AY \qquad (2-3)$$

نكتب العلاقة $(1-2)$ بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \acute{x}_1 \\ \acute{x}_2 \\ \vdots \\ \acute{x}_n \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \acute{y}_1 \\ \acute{y}_2 \\ \vdots \\ \acute{y}_n \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$X = C\acute{X}, \qquad Y = C\acute{Y} \qquad (2-4)$$

هذا يعني أن:

$$X^T = (\acute{X})^T C^T \qquad (2-5)$$

نعوض العلاقتين $(4-2)$ و $(5-2)$ في $(3-2)$ فنحصل على المتطابقة:

$$f(u,v) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv \\ X^{\mathrm{T}}AY \equiv \left(\acute{X}\right)^T (C^T AC)\acute{Y}$$

لكن، وحسب $(3-2)$واستبدال A بالمصفوفة $C^T AC$، فإن المصفوفة:

$$\left(\acute{X}\right)^T (C^T AC)\acute{Y}$$

تمثل شكلاً ثنائي الخطية $\acute{f}$بالمتغيرات $\acute{x}_1, \ldots, \acute{x}_n; \acute{y}_1, \ldots, \acute{y}_n$و مصفوفة $C^T AC$ و يكون:

$$f(u,v) = \acute{f}(\acute{x}_1, \ldots, \acute{x}_n; \acute{y}_1, \ldots, \acute{y}_n);$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} \acute{x}_i \acute{e}_i \, , v = \sum_{j=1}^{n} \acute{y}_j \acute{e}_j$$

بما أن $\acute{A}$ هي مصفوفة الشكل ثنائي الخطية:

$$\acute{f}(\acute{x}_1, \dots, \acute{x}_n; \acute{y}_1, \dots, \acute{y}_n)$$

عندئذٍ يكون:

$$\acute{A} = C^T A C$$

و هو المطلوب.

مثال(2−1):

ليكن $V = \mathbb{R}^3$ فضاءً متجهياً على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن الشكل ثنائي الخطية معطى بالصيغة الآتية:

$$f(u, v) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 7x_1y_3 - 2x_2y_1 - 7x_2y_2 + 3x_3y_3$$

أوجد مصفوفة (u, v) في الأساس القانوني للفضاء V.

الحل:

نلاحظأن:

$$f(e_1, e_1) = a_{11} = 3 \, , \qquad f(e_1, e_2) = a_{12} = 2$$
$$f(e_1, e_3) = a_{13} = 7 \, , \qquad f(e_2, e_1) = a_{21} = -2$$
$$f(e_2, e_2) = a_{22} = -7 \, , \qquad f(e_2, e_3) = a_{23} = 0$$
$$f(e_3, e_1) = a_{31} = 0 \; , \quad f(e_3, e_2) = a_{32} = 0$$
$$f(e_3, e_3) = a_{33} = 3$$

وبالتالي فإن مصفوفة الشكل ثنائي الخطية $f(u, v)$ تعطى بالشكل الآتي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال(2−2):

ليكن $V=\mathbb{R}^3$ فضاءً متجهياً على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن الشكل ثنائي الخطية معطى بالصيغة الآتية:

$$f(u,v)=-2x_1y_1+3x_2y_2+4x_3y_3$$

بالنسبة للأساس القانوني للفضاء V. أوجد مصفوفة (u,v) في الأساس

$$\{\acute{e}_1=(1,1,1),\acute{e}_2=(1,1,-1),\acute{e}_3=(1,-1,-1)\}$$

الحل:

لدينا

$$f(\acute{e}_1,\acute{e}_1)=\acute{a}_{11}=-2.1.1+3.1.1+4.1.1=5$$
$$f(\acute{e}_1,\acute{e}_2)=\acute{a}_{12}=\ f(\acute{e}_2,\acute{e}_1)=\acute{a}_{21}=$$
$$=-2.1.1+3.1.1+4.1.-1=-3$$
$$f(\acute{e}_2,\acute{e}_2)=\acute{a}_{22}=-2.1.1+3.1.1+4.-1.-1=5$$
$$f(\acute{e}_1,\acute{e}_3)=\acute{a}_{13}=f(\acute{e}_3,\acute{e}_1)=\acute{a}_{31}=$$
$$=-2.1.1+3.-1.1+4.-1.1=-9$$
$$f(\acute{e}_2,\acute{e}_3)=\acute{a}_{23}=\ f(\acute{e}_3,\acute{e}_2)=\acute{a}_{32}=$$
$$=-2.1.1+3.1.-1+4.-1.-1=-1$$
$$f(\acute{e}_3,\acute{e}_3)=a_{33}=-2.1.1+3.-1.-1+4.-1.-1=-5$$

وبالتالي فإن:

$$A=\begin{bmatrix}5 & -3 & -9\\ -3 & 5 & -1\\ -9 & -1 & -5\end{bmatrix}$$

مثال (2−3):

ليكن $V=\mathbb{R}^2$ فضاءً متجهاً على الحقل $\mathbb{R}$ وليكن الشكل ثنائي الخطية معطى بالصيغة الآتية: $f(u,v) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$

والمطلوب أوجد المصفوفة لـ f بالنسبة للأساس:

$$\{\acute{e}_1 = (1,0), \acute{e}_2 = (1,1)\}$$

الحل :

$$a_{11} = f(\acute{e}_1, \acute{e}_1) = 2 - 0 + 0 = 2$$

$$a_{12} = f(\acute{e}_1, \acute{e}_2) = 2 - 3 + 0 = -1$$

$$a_{22} = f(\acute{e}_2 \acute{e}_2) = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$a_{21} = f(\acute{e}_2, \acute{e}_1) = 2 - 0 + 0 = 2$$

وبهذا تكون:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

تعريف (2−1):

نسميرتبة أي مصفوفة للشكل ثنائي الخطية على فضاء متجهي V على أي حقل Fأساسه S، بأنها رتبة الشكل ثنائي الخطية. ونرمز لها بالرمز $rank\ (f)$.

مثال(2−4):

أوجد رتبة الشكل ثنائي الخطية(u,v) على الفضاء $V=\mathbb{R}^3$على الحقل $\mathbb{R}$ الآتي:

$$f(u,v) = 3x_1y_1 - 5x_1y_2 + 6x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 4x_3y_3$$

الحل:

نوجد مصفوفة الشكل ثنائي الخطية في الأساس القانوني E للفضاء V:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -5 & 6\\ -1 & 2 & -2\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

بسهولة نجد أن $rank\ A=2$، وبالتالي فإن $rank\ (f)=2$.

تعريف (2−2):

يقال عن المصفوفة Aإنها متطابقة مع المصفوفة B إذا وجدت مصفوفة عكوسة

(غير شاذة) C بحيث يكون: $A=C^TBC$

نتيجة(2−1):

المصفوفتان المتطابقتان لهما الرتبة نفسها.

البرهان:

لتكن A و B مصفوفتين متطابقتين ولتكن C مصفوفة عكوسة. عندئذٍ تكون C^Tعكوسة أيضاً،وبالتالي ومن العلاقة $A=C^TBC$نجد أن:

$$rank\ A=rank\ (C^TBC)=rank\ B$$

نتيجة(2−2):

إن علاقة تطابق المصفوفات هي علاقة تكافؤ.

البرهان:

1) إن أي مصفوفة A تطابق نفسها وذلك لأن I مصفوفة الواحدة، ونكتب $A=I^TAI$.

2) لتكن A متطابقة مع B. عندئذٍ توجد مصفوفة عكوسةC بحيث يكون

$A=C^{\mathrm{T}}BC$، وبما أن المصفوفة $(C^T)^{-1}=(C^{-1})^T$. عندئذٍ يكون:

$$B=(C^T)^{-1}A\,C^{-1}=(C^{-1})^TA\,C^{-1}$$

و C^{-1} مصفوفة عكوسة. إذن B تتطابق مع A.

3) لتكن A متطابقة مع B و B متطابقة مع D. عندئذٍ توجد مصفوفتان C و S بحيث يكون $A = C^T BC$،$B = S^T DS$، حيث C و S مصفوفتان عكوستان ومنه نجد أن:

$$A = C^T BC = C^T (S^T DS)C = (SC)^T D(SC)$$

و SC مصفوفة عكوسة. إذن المصفوفة A تتطابق مع D.

تعريف (2–3):

نسمي الشكل ثنائي الخطية $f(u, v)$ على الفضاء المتجهي V على حقل F بالشكل المنحل (الشاذ) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$rank\ (f) < dim\, V$$

و يسمى غير منحل (غير شاذ) إذا كان:

$$rank\ (f) = dim\, V$$

(3–6) الأشكال ثنائية الخطية المتناظرة والمتناظرة المتخالفة

Symmetric and Skew Symmetric Bilinear Forms

تعريف (3–1):

يقال عن شكل ثنائي الخطية $f(u, v)$ على الفضاء V على حقل Fإنه متناظر إذا كان:

$$f(u, v) = f(v, u\ );\ \forall\, u, v \in V$$

نتيجة(3–1):

يكون الشكل الثنائي الخطية $f(u,v)$ متناظراً على الفضاء المتجهيV فوق الحقل F

إذا وفقط إذا كانت أي مصفوفةA له متناظرة.

البرهان:

لنفترض أن $f(u,v)$ شكل ثنائي الخطية متناظر وأن A تمثل مصفوفة f إذاً:

$f(X, Y) = X^{T}AY = (X^{T}A.Y)^{T} = Y^{T}.A^{T}.X$

(وذلك للاعتبار أن $X^{T}A.Y$ هو عدد سلمي وبالتالي يساوي منقوله)

بما أن $f(u,v)$ متناظر إذاً $f(u,v) = f(v,u)$ وبالتالي:

$Y^{T}AX = f(Y,X) = f(X,Y) = X^{T}A.Y$

وبما أن هذه المساواة صحيحة من أجل جميع المتجهات X,Y فإنه ينتج أن $A = A^{T}$ وتكون المصفوفة A متناظرة .

وبالعكس لنفرض أن A متناظرة إذاً:

$f(X, Y) = X^{T}A\,Y = (X^{T}AY)^{T} = Y^{T}A^{T}X = Y^{T}AX = f(Y, X)$

أي أن الشكل $f(X,Y)$ متناظر.

تعريف (3−2):

يقال عن شكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ على الفضاء V على حقل Fإنه متناظر متخالف إذا كان: $f(u,v) = -f(v,u);\ \forall u,v \in V$

و بعبارة أخرى، يكون شكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ متناظراً متخالفاً إذا كانت مصفوفته A في أساس للفضاء V متناظرة متخالفة، أي أن: $A = -A^{T}$

مثال(3−1):

أوجد مصفوفة الشكل ثنائي الخطية في الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^{3}$ و بين نوعه.

$$f(u,v) = x_1y_1 + 2\,x_1y_2 - 3\,x_1y_3 + 2\,x_2y_1 + 4\,x_2y_2 - x_2y_3 - 3\,x_3y_1 - x_3y_2 + 3\,x_3y_3$$

الحل:

لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A = A^T$. إذن الشكل ثنائي الخطية متناظر.

مثال(3−2):

عبر عن شكل ثنائي الخطية المعطى بدلالة المصفوفة التالية و بين نوعه.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +2 & +3 \\ -2 & 0 & -5 \\ +3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$f(u,v) = +2\,x_1y_2 + 3\,x_1y_3 - 2\,x_2y_1 - 5\,x_2y_3 + 3\,x_3y_1 - 5x_3y_2$$

كما أن $A = -A^T$. إذن الشكل $f(u,v)$ثنائي خطية متناظر متخالف.

إن المبرهنة التالية هي المبرهنة الأساسية لبنية الأشكال ثنائية الخطية المتناظرة

مبرهنة(3−1):

ليكن $f(u,v)$ شكلاً ثنائي الخطية متناظراً على الفضاء المتجهي على حقل F بحيث $2 \neq 0$. عندئذٍ يوجد أساس$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$للفضاء V بحيث تكون مصفوفة الشكل $f(u,v)$ مصفوفة قطرية، أي أن $f(e_i, e_j) = 0$ لكل $i \neq j$.

البرهان:

واضح أن المبرهنة صحيحة من أجل $f = 0$ أو $dim\,V = 1$.

ليكن $f \neq 0$ و $dim\,V > 1$. إذا كان $f(u,u) = 0$ لكل $u \in V$. عندئذٍ من الشكل القطبي للشكل fنجد أن $f = 0$.وبالتالي يوجد متجه $e_1 \in V$، بحيث $f(e_1, e_1) \neq 0$. نأخذ الفضاء الجزئيU المولد بالمتجه e_1. نعرف المجموعة Wبالشكل الآتي:

$$W = \{w \in V : \ f(w, e_1) = 0, \qquad e_1 \in U\}.$$

إن Wفضاء جزئي من V. نبرهن الآن أن:

$$V = U \oplus W$$

1. نبين أولاً أن $V = U + W$. ليكن $v \in V$. عندئذٍ نختار:

$$w = v - \frac{f(e_1,v)}{f(e_1,e_1)}e_1 \qquad (3-1)$$

وبالتالي يكون:

$$f(e_1,w) = f(e_1,v) - \frac{f(e_1,v)}{f(e_1,e_1)}f(e_1,e_1) = 0$$

أي أن $w \in W$. وبالتالي و من العلاقة $(3-1)$ نجد أن v هو مجموع عنصرين أحدهما من U و الآخر من W، أي أن $V = U + W$.

2. نفرض الآن أن $u \in U \cap W$، وبالتالي فإن $u = \alpha e_1$ و $\alpha_1 \in F$ بما أن $e_1 \in W$. عندئذٍ يكون:

$$f(u,u) = f(\alpha\, e_1, \alpha\, e_1) = \alpha\, \alpha\, f(e_1,e_1) = 0$$

لكن $f(e_1,e_1) \neq 0$. إذن $\alpha = 0$،وبالتالي$u = \alpha\, e_1 = 0$،أي أن $U \cap W = \{0\}$.

ومنه: $V = U \oplus W$

نلاحظ أن مقصور الشكل ثنائي الخطية f على الفضاء W يكون شكلاً ثنائي الخطية متناظراً على W ولدينا $dim\, W = n - 1$، وبالتالي حسب الفرض الاستقرائي يوجد أساس $S_1 = \{e_2, \dots, e_n\}$للفضاء W، بحيث يكون

$$f(e_i,e_j) = 0,\ i \neq j,\ 2 \leq i,\ j \leq n.$$

وحسب تعريف الفضاء W نجد أن $f(e_i,e_j) = 0$ لكل $j = 2, \dots, n$. إذن يكون $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ أساساً للفضاء V، حيث $f(e_i,e_j) = 0$ لكل $i \neq j$.

نتيجة(3-2):

ليكن Vفضاءً متجهياً على حقل Fولتكن المصفوفة المتناظرة A في أساس ما للفضاء V. عندئذٍ توجد مصفوفة عكوسة C بحيث تكون المصفوفة C^TACقطرية.

البرهان:

ينتج من كون المصفوفة المتناظرة A في أساس للفضاء V. يقابلها شكل ثنائي الخطية متناظر $f(u,v)$. وحسب المبرهنة $(3-1)$ ينتج المطلوب.

ملاحظة (3-1):

ليكن $f(u,v)$ شكلاً ثنائي الخطية على الفضاء المتجهي V على حقل F. نلاحظ أن:

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\,[f(v,u\,) + f(v,u)]$$

شكل ثنائي الخطية متناظر و

$$h(u,v) = \frac{1}{2}\,[f(v,u\,) - f(v,u)]$$

شكل ثنائي الخطية متناظر متخالف. و يكون:

$$f(u,v) = g(v,u\,) + h(u,v)$$

أي أن كل شكل ثنائي الخطية يمكن تمثيله على شكل مجموع شكلين أحدهما متناظر والآخر متناظر متخالف.

تعريف (3−3):

يقال عن شكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ على الفضاء V على حقل Fإنه متناوب إذا كان:

$$f(u,u) = 0, \qquad \forall\, u \in V.$$

ملاحظة (3−2):

نلاحظ أن أيَ شكل متناوب متناظر متخالف وذلك لأن:

$$f(u+v,u+v) = 0$$

حسب تعريف شكل ثنائي الخطية المتناوب، ومن جهة أخرى فإن:

$$f(u+v,u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u\,)$$
$$+f(v,v) = f(u,v) + f(u,v)$$

لأن $f(v,v)=f(u,u)=0$، وبالتالي فإن: $f(u,v)+f(v,u)=0$

ومنه: $f(u,v)=-f(v,u)$

مبرهنة (3−2):

ليكن $f(u,v)$ شكلاً ثنائي الخطية متناوباً على الفضاء المتجهي Vعلى حقل F.

عندئذٍ تكون مصفوفة $f(u,v)$ في الأساس $S=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ للفضاء V

معطاة بالشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \end{pmatrix} \qquad (3-2)$$

كماأن عدد الخلايا من الشكل$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$يتحدد بشكل وحيد بواسطة f وهي rank f.

البرهان:

واضح أن المبرهنة صحيحة عندما يكون $f(u,v)=0$. إذا كان $dim\,V=1$، فإن:

$$f(\alpha_1 u, \quad \alpha_2 u)=\alpha_1\alpha_2\, f(u,u)=0;\ \alpha_1,\alpha_2\in F$$

وبالتالي f متناوب.

ليكن $f\neq 0$ و$dim\,W>1$. عندئذٍ يوجد متجهان غير صفريين $e_1,e_2\in V$،بحيث $f(e_1,e_2)\neq 0$. نفرض أن $f(e_1,e_2)=1$، وهذا ممكن إذا ضربنا e_1 بعامل مناسب، وبالتالي: $f(e_2,e_1)=-1$.

إن المتجهين e_1,e_2 مستقلان خطياً و ذلك لأنه إذا فرضنا أن $e_1=\alpha\, e_2$، فإن:

$$f(e_1, e_2) = f(\alpha\, e_2, e_2) = \alpha\, f(e_2, e_2) = 0$$

نعتبر الفضاء الجزئي Uمن الفضاء V مولداً بالمتجهين e_1, e_2. عندئذٍ لكل $u \in U$

نجد أن$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$

ومنه :

$$f(u\,, e_1) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, e_1) = -\,\alpha_2 \qquad (3-3)$$

$$f(u\,, e_2) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, e_2) = \alpha_1 \qquad (3-4)$$

وبالتالي فإن مصفوفة الشكل ثنائي الخطية f في الأساس $\{e_1, e_2\}$يكون لها الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نأخذ المجموعة الجزئية W من الفضاء V المعطاة كما يلي:

$$W = \{w \in V :\ f(w, u) = 0, \qquad \forall\ u \in U\}$$

إن W فضاء جزئي من V. نبرهن الآن:

$$V = \mathrm{U} \oplus \mathrm{W}$$

نبين أولاً أن $V = U + W$. ليكن $v \in V$. عندئذٍ نختار:

$$\mathrm{u} = f(v, e_2)\, e_1 - f(v, e_1)\, e_2 \text{ و } W = v - u, \qquad (3-5)$$

إن $u \in U$. لأن u تركيب خطي للمتجهين e_1, e_2.من العلاقتين$(3-2)$و $(3-5)$نجد أن:

$$f(u, e_1) = f(v, e_1) = -\alpha_2$$

وبالتالي يكون:

$$f(w, e_1) = f(v - u, e_1) = f(v, e_1) - f(u, e_1) = 0$$

و أيضاً لدينا $f(u, e_2) = (v, e_2) = \alpha_1$ و ذلك من العلاقتين $(3-4)$ و $(3-5)$

ومنه:

$$f(w, e_2) = f(v - u, e_2) = f(v, e_2) - f(u, e_2) = 0$$

وبالتالي فإن $w \in W$. إذن $v = u + w;\ \ u \in U; w \in W$، أي أن

$V = U + W$ وحسب تعريف الفضاء الجزئي W، فإن $U \cap W = \{0\}$، ومنه يكون:

$$V = U \oplus W$$

إن مقصور الشكل ثنائي الخطية $f(v, u)$ على الفضاء W هو شكل ثنائي الخطيةعلى W وتكون مصفوفته في الأساس $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$للفضاء Wحسب الفرض الاستقرائي مصفوفة من الشكل $(2-3)$. إذن المجموعة $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ تشكل أساساً للفضاء V بحيث تكون مصفوفة الشكل ثنائي الخطية $f(v, u)$ على الفضاء V في ذلك الأساس مصفوفة من الشكل $(2-3)$.

وبفرض أن fشكل ثنائي الخطية متناوب عندها فإن رتبة f زوجية والك لأن f يمثل بواسطةمسصفوفة من الشكل السابق في المبرهنة وكل خلية من الخلايا (المصفوفات الجزئية) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ تكون رتبتها 2 وبذلك إذا كان يوجد عدد m من هذه الخلايا فإن rank f=2m وهذا يعني أن رتبة f زوجية .

(4−6) خوارزمية تحويل مصفوفة متناظرة إلى مصفوفة قطرية

Algorithm to transform asymmetric matrices intodiagonal matrix

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل F و لتكن $A = [a_{i\,j}]$بحيث $a_{ij} = a_{ji}$لكل $1 \le i, j \le n$ و ليكن $2 \ne 0$ في الحقل F.

إن تشكيل خوارزمية تحول لنا المصفوفةالمتناظرةA في أساس للفضاء V إلى مصفوفة قطرية ينفذ بالخطوات التالية:

1) إذا كان $a_{11} \ne 0$. نجري التحويلات الأولية على سطور المصفوفة Aحيث

$r_i \to -a_{i1}r_1 + a_{11}r_i$ لكل $i = 2, \dots, n$ فنجد أن جميع عناصر العمود الأول ماعدا العنصر الأول في المصفوفة A تكون أصفاراً، وكذلك نجري التحويلات الأولية على أعمدة المصفوفة A حيث $c_i \to -a_{i1}c_1 + a_{11}c_i$ لكل $i = 2, \dots, n$ فنجد أن جميع عناصر السطر الأول ماعدا العنصر الأول في A تكون أصفاراً، أي أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

2) إذا كان $a_{11} = 0$ و $a_{ii} \neq 0$ لبعض الأدلة $i > 1$. نبادل بين السطرين r_1 و $r_i r_1 \leftrightarrow r_i$ و بين العمودين c_i و $c_1 c_1 {}_{\leftrightarrow} c_i$ كي نجعل العنصر a_{ii} يقع في السطر الأول و العمود الأول وهذا يقودنا إلى الخطوة 1).

3) إذا كان $a_{11} = 0$. نختار الدليلين i و jبحيث يكون $a_{ij} \neq 0$. نجري التحويلات الأولية على السطور، حيث $r_i \to r_j + r_i$و كذلك نجري التحويلات الأولية على الأعمدة، حيث $c_i \to c_j + c_i$كي يكون لدينا $2\ a_{ij} \neq 0$ على القطر في المكان i وهذا يقودنا إلى الخطوة 2).

4) نحصل في كل حالة على اختزال المصفوفة Aإلى الشكل $(3-6)$ مع العلم أن المصفوفة Bهي مصفوفة متناظرة مرتبتها أقل من مرتبة A. نكرر الخطوات السابقة على المصفوفات الناتجة إلى أن نحصل على المصفوفة القطرية المطلوبة.

ملاحظة (4−1):

يمكن استبدال الخوارزمية السابقة لتحويل مصفوفة إلى الشكل القطري، وذلك بأن نشكل المصفوفة الموسعة $[A: I]$ ونجري عليها التحويلات الأولية على الأسطر و الأعمدة فتحول المصفوفة إلى المصفوفة $[D: S]$، حيث Dمصفوفة قطرية و $S^T = C$.

مثال (4−1):

لتكن المصفوفة المتناظرة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

نشكل المصفوفة $[A:I_3]$ التالية:

$$[A : I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نجري العمليات الأولية على الأسطر التالية:

$$r_3 \to r_3 + 3\,r_1 \quad , \quad r_2 \to r_2 - 2\,r_1$$

فيكون لدينا المصفوفة التالية:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

كما نجري العمليات الأولية على الأعمدة:

$c_3 \to c_3 + 3\,c_1 \quad , \quad c_2 \to c_2 - 2\,c_1$ فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نجري الآن العملية الأولية التالية على السطر الثالث:

$r_3 \to r_3 - 2\,r_2$ فنحصل على المصفوفة:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

أخيراً نجري العملية الأولية التالية على العمود:

$c_3 \to c_3 - 2\,c_2$ فنحصل على المصفوفة:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

وبالتالي فإن المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون:

$$P^{\mathsf{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

مثال (4−2):

لتكن المصفوفة المتناظرة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

و المطلوب: أوجد مصفوفة غير شاذة S بحيث تكون المصفوفة S^TASقطرية.

الحل:

نشكل المصفوفة $[A{:}I]$ التالية:

$$[A{:}I] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجري العمليات الأولية على الأسطر التالية:

$r_2 \to 3\,r_1 + r_2$ ، $r_3 \to -2\,r_1 + r_3$فيكون لدينا المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

كما نجري العمليات الأولية التالية على الأعمدة:

$c_2 \to 3\,c_1 + c_2$ ، $c_3 \to -2\,c_1 + c_3$ فنجد أن المصفوفة يكون لها الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجري الآن العملية الأولية التالية على السطر $r_3 \to r_2 + 2\,r_3$ فنحصل على المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \vdots & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أخيراً نجري العملية الأولية التالية على العمود $c_3 \to c_2 + 2\,c_3$ فنجد المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & \vdots & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن المصفوفة $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ويكون:

$$S^T A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

مثال (4-3):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ *مصفوفة متناظرة . أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P^{\top}AP$ قطرية وأوجد المصفوفة القطرية $P^{\top}AP$.*

الحل: نكون أولاً المصفوفة ($A: I_3$)

$$[A : I_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه حسب الحالة (2) من خوارزمية تحويل مصفوفة متناظرة إلى مصفوفة قطرية كي ننقل المدخل القطري غير الصفري (1-) إلى الموضع القطري الأول، تطبق العملية الصفية التالية: $r_1 \leftrightarrow r_2$ ثم العملية العمودية المقابلة $c_1 \leftrightarrow c_3$ فنجد:

$$r_1 \leftrightarrow r_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \vdots 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \vdots 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \vdots 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \vdots 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \vdots 0 & 1 & - \\ 1 & 1 & 0 \vdots 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نجري التحويلات الأولية على الأسطر التالية:

$r_2 \to r_2 + 2r_1 \quad , \quad r_3 \to r_3 + r_1$ فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \vdots 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \vdots 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \vdots 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجري التحويلات الأولية على الأعمدة التالية: $c_2 \to c_2 + 2c_1 \quad , \quad c_3 \to c_3 + c_1$

فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \vdots 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \vdots 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \vdots 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ثم نجري التحويلات على السطر الثالث وهو:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \vdots\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \vdots\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \vdots -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} r_3 \to -2r_3 + 3r_2$$

ثم نجري التحويلات على العمود الثالث:

$c_3 \to 2c_2 - 2c_3$ نجد:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \vdots 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \vdots 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -14 \vdots -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الآن وقد تم التقطير ونضع:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

إذاً:

$$P^T.A.P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

(5−6) الأشكال التربيعية

The Quadratic Forms

تعريف (5−1):

نسمي التطبيق العددي:

$$f : V \times V \to F$$

بأنه شكل تربيعي إذا استبدلنا v بـ u في الشكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ على الفضاء V على الحقل F. و يسمى الشكل ثنائي الخطية المتناظر $f(u,v)$ بالشكل القطبي للشكل التربيعي $f(u,u)$.

ملاحظة (5−1):

من الملاحظ أنالشكل التربيعي هو كثيرة حدود ويعطى بالعلاقة

$$f(u,u) = X^{\mathrm{T}}AX = [x_1 \dots x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\, \mathrm{x}_i \mathrm{x} = a_{11}x_1^{\,2} + a_{22}x_2^{\,2} + \dots + a_n x_n^{\,2} + 2\sum_{i<j} a_j x_i x_j$$

كما أن مصفوفة الشكل التربيعي تكون مصفوفة متناظرة.

ملاحظة (5−2

لاحظ أنه إذا كانت المصفوفة A السابقة قطرية فإن الشكل القطري المقابل $f(u,u)$ له التمثيل القطري:

$$q\,(X) = f(X,X) = X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

أي أن كثير الحدود التربيعية الممثلة لـq لا تحتوي حدوداً لجداءات تقاطعية.

وكل شكل تربيعي يكون له مثل هذا التمثيل (عندما $2\neq 0$).

نتيجة (5−1):

ليكن fشكلاً تربيعياً على الفضاء V على حقل F. بحيث يكون $f(u,v)$ شكلاً قطبياً له.
عندئذٍ يمكن الحصول على الشكل المتناظر $f(u,v)$ بدلالة الشكل القطبي.

البرهان

نفرض أن $0 \neq 2$ في الحقل F، حسب تعريف الشكل ثنائي الخطية فإن:

$$f\left(u+v,u+ \ v\right)=f(u,u)+f(u,v)+f(v,u)+f\left(v,v\right)$$

و بما الشكل القطبي يكون متناظراً، فإن $f(u,v)=f(v,u)$ومنه نجد:

$$f(u,v)=\frac{1}{2}\left[f(u+v,u+v)-f(u,u)-f(v,v)\right]=\frac{1}{2}\left[q(u+v)-q(u)-q(v)\right]$$

(بما أن $0 \neq 2$، فإن القسمة السابقة على العدد 2 معرفة).

ملاحظة (5−3):

كذلك إن معرفة الشكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ يمكننا من حساب الشكل التربيعي :

$$q(u)=f(u,u)$$

نستنتج أنه يوجد تقابل بين الأشكال الخطية المتناظرة وبين الأشكال التربيعية.

مثال (5−1):

إذا كان $f(u,v) = x_1^2$شكلاً تربيعياً على الفضاء $\mathbb{R}^3$ والمطلوب أوجدالشكل ثنائي

الخطية المستنتج منه.

ثم أعد نفس السؤال من أجل $f(u,u)=x_1x_2$ ثم من أجل

$$f(u,v)=x_1^2+2x_2^2+x_1x_2+3x_2x_3$$

الحل: لدينا الصيغة الخطية

$f(u,v) = \frac{1}{2}[f(u+v\,,u+v) - f(u,u) + f(v,v)]$ وبتطبيق هذه الصيغة

وبفرض أن: $v=(y_1\,,y_2\,,\,y_3)$, $u=(x_1\,,x_2\,,x_3)$ نجد:

$$f(u,v) = \frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2 - x_1^2 - y_1^2] = x_1 y_1$$

وكذلك بفرض أن: $f(u,u) = x_1 x_2$ فإن:

$$f(u,v) = \left(\frac{1}{2}\right)[(x_1+y_1)(x_2+y_2) - x_1x_2 - y_1y_2]$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

وأخيراً إذا كان:

$$f(u,v) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3$$

فإن:

$$\begin{aligned}
f(u,v) = \frac{1}{2}[&(x_1+y_1)^2 + 2(x_2+y_2)^2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) \\
&+ 3(x_2+y_2)(x_3+y_3) - x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2 - 3x_2x_3 \\
&- y_1^2 - 2y_2^2 - y_1y_2 - 3y_2y_3] \\
&= \frac{1}{2}[2x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_3 \\
&+ 3x_3y_2] \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 + 4x_2y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2) + x_1y_1
\end{aligned}$$

بالترتيب نجد:

$$f(u,u) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{3}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$$

مثال (5−2):

أوجد الشكل التربيعي $f(u,u)$ للمصفوفة المتناظرة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

الحل:

لدينا:

$$f(u,u) = [x_1 x_2]\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [2x_1 + 3x_2, \qquad 3x_1 - 5x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 - 5x_2^2 = 2x_1^2 + -5x_2^2 + 6x_1x_2$$

مثال (5−3):

أوجد المصفوفة A للشكل التربيعي:

$$f(u,u) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_1x_3 + 6x_3^2$$

في الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال (5−4):

أوجد الشكل التربيعي $f(u,u)$ للمصفوفة A الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل:

واضح أن معاملات x_i^2 هي a_{ii} وكذلك فإن معاملات $x_i x_j$ هي $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$f(u,u) = 2x_1^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 + 7x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$$

مثال(5−5):

ليكن الشكل التربيعي:

$$f(u,v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 12x_2x_3 + 9x_3^2 - 8x_1x_3$$

والمطلوب: أوجد تعويضاً خطياً للمتغيرات x_1, x_2, x_3 بدلالة المتغيرات x'_1, x'_2, x'_3 على الترتيب بحيث يكون للشكل $f(u,u)$ الشكل القطري.أي ($q\ (x'_1, x'_2, x'_3$ يكون قطرياً.

الحل: نوجد مصفوفة الشكل التربيعي في الأساس النظامي للفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ فيكون:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -6 \\ -4 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

لنوجد الآن مصفوفة غير شاذة P حيث تكون المصفوفة $P^{\mathsf{T}}AP$ قطرية لذلك نتبع ما اجريناه سابقاً على المصفوفة الموسعة :

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نجري العمليات الأولية على الأسطر التالية للمصفوفة $[A : I]$ وهي:

$$r_3 \to r_3 + 4r_1 \quad , \quad r_2 \to r_2 - 2r_1$$

فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & \vdots & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ثم نجري العمليات على الأعمدة: $c_2 \rightarrow c_2 - 2c_1$, $c_3 \rightarrow c_3 + 4c_1$ فنجد

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & \vdots & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من جديد نجري العمليات الأولية على السطر: $r_3 \rightarrow r_3 + 2r_2$ ومن ثم على العمود $c_3 \rightarrow c_3 + 2c_2$

نجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$P^T . A. P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

أي يجب أن نقوم بالتعويض:

$$x_1 = \acute{x}_1 - 2\acute{x}_2 \quad , \quad x_2 = \acute{x}_2 + 2\acute{x}_3 \quad , \quad x_3 = \acute{x}_3$$

ويكون الشكل التربيعي:

$$q(\acute{x}_1, \acute{x}_2, \acute{x}_3) = f(u, u) = \acute{x}_1{}^2 - \acute{x}_2{}^2 - 3\acute{x}_3{}^2$$

أو:

$$q(r, s, t) = r^2 - s^2 - 3t^2$$

(5−6) تحويل الشكل التربيعي إلى مجموع حدود مربعة

Reducing Quadratic Form to the sum of squares

تعريف (1−6):

الشكل التربيعي أو الشكل ثنائي الخطيةوالذي تكون مصفوفته قطرية في أساس ما للفضاء V على الحقل Fيسمى الشكل القانوني.

مبرهنة(2−6):

ليكن f شكلاً تربيعياً معرفاً على الفضاء المتجهي V على الحقل F. عندئذٍ يوجد أساس قانوني $\{e_1,\dots,e_n\}$ للفضاء Vبحيث يكون لـ f شكلاً قانونياً.

البرهان:

واضح أن حالة $f(u,u)=0$ محققة. ليكن f شكلاً تربيعياً معرفاً على الفضاء V والذي بعده nمعطى في الأساس $\{e_1,\dots,e_n\}$بالصيغة الآتية:

$$f(u,u)=\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,x_i x_j;\ \ u\in V \quad (6-1)$$

نفرض أن $\{\acute{e}_1,\dots,\acute{e}_n\}$أساس آخر للفضاء V. عندئذٍ:

$$u=x_1e_1+\cdots+\ x_ne_n=\acute{x}_1\acute{e}_1+\cdots+\acute{x}_n\acute{e}_n;\ \ u\in V$$

و أن $x_1,\dots,x_n$ و $\acute{x}_1,\dots,\acute{x}_n$ مركبات المتجه u في الأساسين

$\{e_1,\dots,e_n\}$ و$\{\acute{e}_1,\dots,\acute{e}_n\}$ على الترتيب و ترتبطان بصيغة الانتقال للمركبات التالية:

$$x_j=\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\acute{x}_i,\quad det(c_{ij})\neq 0 \qquad (6-2)$$

وبالتالي يكون:

$$f(u,u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{x}_i\mathrm{x}_\mathrm{j}=\sum_{i,j=1}^{n} \acute{a}_{ij}\acute{x}_i\acute{y}_j$$

كما هو معلوم نعتبر الأساس $\{e_1,\dots,e_n\}$ للفضاء V و تمثيل الشكل التربيعي في العلاقة $(6-1)$معطى. لكن المسألة تكمن في اختيار الأساس $\{\acute{e}_1,\dots,\acute{e}_n\}$ أو الصيغة $(6-2)$ بحيث تكون المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}\acute{a}_{11} & \cdots & \acute{a}_{1n}\\ \dots & \cdots & \dots\\ \acute{a}_{n1} & \cdots & \acute{a}_{nn}\end{bmatrix}=SAS$$

للشكل التربيعي$f(u,u)$ المعطى بالعلاقة $(6-1)$

$$f(u,u)=\varphi(\acute{x}_1,\dots,\acute{x}_n)=\sum_{i,j=1}^{n} \acute{a}_{ij}\acute{x}_i\acute{y}_j;$$

في ذلك الأساس الشكل القطري، أي أن $\acute{a}_i=0$ لكل $i\neq j$.

نقوم بحل تلك المسألة بطريقة الاستقراء الرياضي بالنسبة للعدد n.

إذا كان $n=1$. عندئذٍ يكون $f(u,u)=a_{11}x^2$، وهذا الشكل هو شكل قانوني. نفرض أن النظرية صحيحة من أجل جميع $m<n$ ونبرهن صحتها من أجل $m=n$. نفرض في البداية أن أحد المعاملات a_{ii} في العلاقة $(6-1)$ لا يساوي الصفر. إذا لم يتناقض مع الحالة العامة، نفرض أن $a_{11}\neq 0$. عندئذٍ العبارة

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)^2 \qquad (6-3)$$

تشكل كثيرة حدود متجانسة من الدرجة الثانية، أي أنها شكل تربيعي بـ n متغيراً $x_1,\dots,x_n$والتي تكون الحدود التي تحوي x_1 موجودة كاملة في الصيغة $(6-1)$.

بطرح العلاقة $(6-3)$من $(6-2)$ نجد أن العلاقة:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)-\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2$$

هي شكل تربيعي بـ $n-1$ متغيراً $x_2,\dots,x_n$و التي نرمز لها بالرمز $\varphi(x_2,\dots,x_n)$.
لدينا

$$\varphi_1(x_2,\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2$$

وبالتالي وحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإنه توجد تحويلات خطية للمتغيرات $x_2,\dots,x_n$

$$\left.\begin{array}{l} x_2=c_{22}\acute{x}_2+\cdots+c_{2n}\acute{x}_n,\\ \quad\dots\qquad\dots\qquad\dots\\ x_n=c_{n2}\acute{x}_2+\cdots+c_{nn}\acute{x}_n,\end{array}\right\},\quad \begin{vmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \dots & \cdots & \dots\\ c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

تحول الشكل $\varphi_1(x_2,\dots,x_n)$ إلى الشكل القانوني:

$$\acute{a}_2{\acute{x}_2}^2+\cdots+\acute{a}_n{\acute{x}_n}^2$$

وبالتالي يكون لدينا العلاقة التالية:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2++\acute{a}_2{\acute{x}_2}^2+\cdots+\acute{a}_n{\acute{x}_n}^2(6-4)$$

نضع الآن

$$\acute{x}_1=\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\ \ \acute{a}_1=\frac{1}{a_{11}}\qquad\qquad (6-5)$$

هذا يسمح لنا بأن نكتب الصيغة $(6-4)$ بالشكل الآتي:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\acute{a}_1{\acute{x}_1}^2+\acute{a}_2{\acute{x}_2}^2+\cdots+\acute{a}_{1n}{\acute{x}_n}^2\qquad (6-6)$$

إن الصيغة$\varphi(x_1,\dots,x_n)$ التي حصلنا عليها بالنسبة للمتغيرات $\acute{x}_1,\dots,\acute{x}_n$ هي صيغة قانونية.

كما أن الانتقال من المتغيرات $x_1,\dots,x_n$ إلى المتغيرات $\acute{x}_1,\dots,\acute{x}_n$ هو عبارة عن تحويل خطي للمتغيرات بمساعدة مصفوفة غير شاذة.

في الواقع بحل العلاقة $(6-5)$ بالنسبة للمتغير x_1نجد أن:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\acute{x}_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \qquad (6-7)$$

نعبر عن $x_2, \dots, x_n$ بدلالة $\acute{x}_2, \dots, \acute{x}_n$ و إجراء بعض التحويلات على الحدود المتشابهة، مما سبق نجد أن:

$$x_1 = c_{11}\acute{x}_1 + c_{12}\acute{x}_2 + \cdots + c_{1n}\acute{x}_n, \quad c_{11} = \frac{1}{a_{11}} \neq 0$$

وبالتالي نحصل أخيراً على الصيغة المطلوبة:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = c_{11}\acute{x}_1 + c_{12}\acute{x}_2 + \cdots + c_{1n}\acute{x}_n, \\ x_2 = c_{22}\acute{x}_2 + \cdots + c_{2n}\acute{x}_n, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ x_n = c_{n2}\acute{x}_2 + \cdots + c_{nn}\acute{x}_n, \end{array}\right\} \qquad (6-8)$$

محددتها:

$$det\, c = \begin{vmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

بهذا الشكل فإن الصيغة $(6-8)$ تحول الشكل $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ إلى الشكل القانوني $(6-6)$. نكون في هذه الحالة قد حللنا المسألة التي وضعت أماموذلك من أجل واحد على الأقل $a_{ii} \neq 0$.

بقي علينا دراسة حالة $a_{ii} = 0$. في هذه الحالة من أجل كل المعاملات a_{ij} المختلفة

عن الصفر، فإن الشكل التربيعي له الشكل $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$

حيث $i \neq j$. ويوجد ضمن هذه المعاملات معاملات غير صفرية

(و إلا كان لدينا $f(u,u) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ و هذه حالة تافهة حذفت سابقاً).

نفرض أن $a_{12} \neq 0$. عندئذٍ تكون بقية الحدود التي لا تحوي كلٌ منها أحد

المتغيرات $x_3, \dots, x_n$ هي $2a_{12}x_1x_2$

(وذلك لأنه في الشكل $\sum_{,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$ الحدود التي لا تحوي أي من المتغيرات $x_3, \dots, x_n$

تكون فقط $a_{11}{x_1}^2, 2a_{12}x_1x_2, a_{22}{x_2}^2$)

و لدينا بالفرض $a_{11} = a_{22} = 0$ بقي فقط $2a_{12}x_1x_2$.

بإجراء التحويلات التالية:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \acute{x}_1 - \acute{x}_2, \\ x_2 = \acute{x}_1 + \acute{x}_2, \\ x_3 = \qquad \acute{x}_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \qquad \acute{x}_n, \end{array}\right\} \qquad (6-9)$$

و التي تكون محددتها:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

إن التحويل $(6-9)$ يحول الشكل $(x_1, \dots, x_n)$ إلى الشكل $\acute{\varphi}(\acute{x}_1, \dots, \acute{x}_n)$ و المؤلفة من $2a_{12}(\acute{x}_1 - \acute{x}_2)(\acute{x}_1 + \acute{x}_2)$، أي من $2a_{12}{\acute{x}_1}^2 - 2a_{12}{\acute{x}_2}^2$ ومن حدود تحوي على الأقل أحد المتغيرات $\acute{x}_3, \dots, \acute{x}_n$ ولا يمكن لأي من هذه الحدود أن يختصر مع أي من $2a_{12}{\acute{x}_1}^2, 2a_{12}{\acute{x}_2}^2$ وبالتالي فإن الشكل $\varphi(\acute{x}_1, \dots, \acute{x}_n)$ يحوي ${\acute{x}_1}^2$ بمعاملات $2a_{12}$ مختلفة عن الصفر، هذا يعني ان الشكل $\acute{\varphi}(\acute{x}_1, \dots, \acute{x}_n)$ و حسب ما سبق يتحول إلى الشكل القانوني بالتحويل الخطي للمتغيرات $\acute{x}_1, \dots, \acute{x}_n$ إلى متغيرات جديدة $\acute{\acute{x}}_1, \dots, \acute{\acute{x}}_n$.
الانتقال من المتغيرات $\acute{x}_1, \dots, \acute{x}_n$ إلى المتغيرات $\acute{\acute{x}}_1, \dots, \acute{\acute{x}}_n$ يشكل تحويلاً خطياً غير شاذ والذي ينقل الشكل $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ إلى الشكل القانوني.

مثال (6−1):

حول الشكل التربيعي التالي إلى الشكل القانوني

$$f(u, u) = x_1x_2 + x_2x_3$$

الحل:

نجري التحويل في العلاقة$(9-6)$فنجد أن:

$$x_1 = \acute{x}_1 - \acute{x}_2$$
$$x_2 = \acute{x}_1 + \acute{x}_2$$
$$x_3 = \acute{x}_3$$

وبالتالي فإن:

$$f(u,u) = (\acute{x}_1 - \acute{x}_2)(\acute{x}_1 + \acute{x}_2) + (\acute{x}_1 + \acute{x}_2)\acute{x}_3$$
$$= {\acute{x}_1}^2 - {\acute{x}_2}^2 + \acute{x}_1\acute{x}_3 + \acute{x}_2\acute{x}_3.$$

و من جديد نجري التحويلات التالية:

$${\acute{x}_1}^2 + \acute{x}_1\acute{x}_3 = \left(\acute{x}_1 - \frac{1}{2}\acute{x}_3\right)^2 - \frac{1}{4}{\acute{x}_3}^2$$

وبالتالي فإن:

$$f(u,u) = \left(\acute{x}_1 + \frac{1}{2}\acute{x}_3\right)^2 - \frac{1}{4}{\acute{x}_3}^2 + \acute{x}_2\acute{x}_3 - {\acute{x}_2}^2$$

نضع:

$$\acute{x}_1 + \frac{1}{2}\acute{x}_3 = \acute{\acute{x}}_1$$
$$\acute{x}_2 = \acute{\acute{x}}_2$$
$$\acute{x}_3 = \acute{\acute{x}}_3$$

عندئذٍ نجد أن:

$$f(u,u) = {\acute{\acute{x}}_1}^2 - {\acute{\acute{x}}_2}^2 - \frac{1}{4}{\acute{\acute{x}}_3}^2 + \acute{\acute{x}}_2\acute{\acute{x}}_3 = {\acute{\acute{x}}_1}^2 - (\acute{\acute{x}}_2 - \frac{1}{2}\acute{\acute{x}}_3)^2$$

أخراً نستخدم التحويل التالي:

$$\acute{\acute{x}}_1 = y_1$$
$$\acute{\acute{x}}_2 - \frac{1}{2}\acute{\acute{x}}_3 = y_2$$

فنحصل على العلاقة:

$$f(u,u) = {y_1}^2 - {y_2}^2.$$

مثال (6−2):

حول الشكل التربيعي التالي إلى مجموع حدود مربعة

$$f(u,u) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(u,u) &= (2x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_3^2 \\ &= (2x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_3)^2 + 3x_3^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 \end{aligned}$$

حيث:

$$y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \quad , \quad y_2 = x_1 - x_3 \quad , y_3 = \sqrt{3}x_3$$

مثال (6−3):

حول الشكل التربيعي التالي:

$$f(u,u) = 2\,{x_1}^2 + 3\,x_1x_2 + 4\,x_1x_3 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

إلى مجموع حدود مربعة.

الحل:

نجري التحويل بالنسبة للمتغير x_3 فنجد أن:

$$f(u,u) = (x_3 + 2x_1)^2 - 4{x_1}^2 + 2\,{x_1}^2 + 3x_1x_2 + {x_2}^2 =$$

$$= (x_3 + 2x_1)^2 + \left(x_2 + \frac{3}{4}x_1\right)^2 - \frac{17}{4}{x_1}^2$$

نضع الآن:

$$x_1 = \acute{x}_1$$

$$\frac{3}{4}x_1 + x_2 = \acute{x}_2$$

$$2x_1 + x_3 = \acute{x}_3$$

وبالتالي يكون:

$$f(u,u) = -\frac{17}{4}\acute{x}_1{}^2 + \acute{x}_2{}^2 + \acute{x}_3{}^2$$

مثال (6-4):

حول الشكل التربيعي التالي إلى مجموع حدود مربعة

$$f(u,u) = 3x_1^2 - 12x_1x_2 + 3x_2^2$$

الحل: نجمع الحدود التي تحوي على x_1^2 , x_1 , x_2 فنحصل على:

$$f(u,u) = 3(x_1^2 - 4x_1x_2) + 3x_2^2$$

نكمل ما داخل القوسين إلى مربع كامل فنجد:

$$f(u,u) = q(x_1,x_2) = 3(x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) + 3x_2^2 - 12x_2^2$$
$$= 3(x_1 - 2x_2)^2 - 9\,x_2^2$$

نقوم بالتعويض الخطي التالي: $y_2 = x_2$, $y_1 = x_1 - 2x_2$ فنحصل على الشكل التربيعي التالي:

$$q(y_1,y_2) = 3y_1^2 - 9y_2^2$$

(7–6) الشكل ثلاثة أنصاف الخطية

Sesquilinear Form

ندرس مفهوم التطبيق العددي على الفضاء المتجهيمنتهالبعد على الحقل $\mathbb{C}$، أي أن:

$$f: V \times V \to \mathbb{C}$$

تعريف (7–1):

يسمى التطبيق العددي $f(u, v)$ شكلاً ثلاثة أنصاف الخطية بالنسبة للمتجهين $u, v \in V$إذا كان:

1) $$f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$$

2) $$f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$$

3) $$f(\alpha\, u, v) = \alpha f(u, v)$$

4) $$f(u, \alpha\, v) = \bar{\alpha} f(u, v)$$

و ذلك لكل $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$و $\alpha \in \mathbb{C}$.

وبعبارة أخرى فإن الشكل ثلاثة أنصاف خطية هو:

خطياً بالنسبة لـ u أي:

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 f(u_1, v) + \alpha_2 f(u_2, v)$$

نصف خطي بالنسبة لـ v أي:

$$f(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \overline{\beta_1} f(u v_1) + \overline{\beta_2}\, f(u, v_2)$$

ملاحظة (7–1):

يتطابق مفهوم الشكل ثلاثة أنصاف الخطية مع الشكل ثنائي الخطية على الفضاء المتجهي على الحقل $\mathbb{R}$.

ليكن $e_1, e_2, \dots, e_n$ أساساً للفضاء المتجهي V على الحقل $\mathbb{C}$. و ليكن $u, v \in V$. عندئذٍ:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \qquad v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

و السؤال الآن كيف يمكننا التعبير عن الشكل ثلاثة أنصاف الخطية بدلالة مركبات المتجهين u, v. لدينا:

$$f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j \, f\left(e_i, e_j\right) \qquad (7-1)$$

نضع $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. عندئذٍ تصبح العلاقة $(7-1)$ بالشكل:

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j \, a_{ij} = X^T A \bar{Y},$$

حيث:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix}.$$

(8−6) الشكل الهرميتي

Hermitian Form

نعتبر الفضاء المتجهي V على حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

تعريف (8−1):

نسمي التطبيق العددي:

$$f: V \times V \to \mathbb{C}$$

و الذي يحقق الشرطين الآتيين:

1) $f(\alpha\, u_1 + \beta\, u_2, v) = \alpha\, f(u_1, v) + \beta f(u_2, v)$

2) $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$

و ذلك لكل $u, u_1, u_2, v \in V$ و لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

بالشكل الهرميتي.

تعريف (8−2):

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل $\mathbb{C}$ و ليكن $e_1, \dots, e_n$ أساساً للفضاء V. إن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ تسمى مصفوفة هرميتية إذا تحقق الشرط التالي:

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}},$$

حيث $\bar{a}$ هو مرافق a.

مبرهنة (8−1):

ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل $\mathbb{C}$، و ليكن $f(u, v)$ شكلاً ثلاثة أنصاف الخطية. يكون الشكل $f(u, v)$ هرميتياً إذا وفقط إذا كانت مصفوفته بالنسبة لأساس للفضاء V مصفوفة هرميتية.

البرهان:

لزوم الشرط: ليكن $f(u,v)$ شكلاً هرميتياً. عندئذٍ يكون:

$$f(e_i,e_j)=\overline{f(e_j,e_i)}$$

وبالتالي فإن $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$.

كفاية الشرط:لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة هرميتية، أي أن $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$. عندئذٍ:

$$f(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\overline{y_j}=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{a_{ji}}\,\overline{y_j}x_i$$

$$=\overline{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\,y_j\overline{x_i}}=\overline{f(v,u)}$$

ملاحظة (8-1):

نكتب عادةً المصفوفة A^* لتدل على منقول المرافقة للمصفوفة A، أي أن:

$$A^*=(\overline{A})^T.$$

مثال (8-1):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2-5i & 3+2i\\ 2+5i & 3 & 4-3i\\ 3-2i & 4+3i & 7\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}3 & 1+2i & -2i\\ 1+2i & 4 & 3+i\\ -2i & 3+i & -8\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A^*=(\overline{A})^T$ أو $A=A^*$ وبالتالي فإن المصفوفة A هرميتية. كما أن B مصفوفة متناظرة، وبالتالي فهي مصفوفة هرميتية.أما C فهي مصفوفة متناظرة فقط وليست هرميتية حيث تحقق $C=C^T$.

مثال (8−2):

أوجد مصفوفة الشكل الهرميتي في الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{C}$ التالي:

$$f(u,v) = 2\,x_1\overline{y_1} - 5i\,x_1\overline{y_2} + 5i\,x_2\overline{y_1} + 3\,x_2\overline{y_2}.$$

الحل:

لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5i \\ 5i & 3 \end{bmatrix}$$

كما أن $\mathrm{A} = (\overline{\mathrm{A}})^T$، أي أن المصفوفة A هرميتية.

مثال (8−3):

أوجد الشكل الهرميتي للمصفوفة A المعطاة بالشكل الآتي في أساس للفضاء $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix}$$

الحل:

لدينا

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

و هما مصفوفتا العمود لمركبات المتجهين u و v على الترتيب، ومنه فإن:

$$f(u,v) = X^T A\overline{Y} = [x_1 x_2]A = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix}$$
$$= x_1\overline{y_1} + (2-i)x_1\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_1} + 7x_2\overline{y_2}.$$

مثال (8−4):

ليكن f شكلاً هرميتياً على الفضاء المتجهي V على الحقل $\mathbb{C}$. عندئذٍ أثبت أن:

$$f(u, \alpha\, v_1 + \beta\, v_2) = \bar{\alpha} f(u, v_1) + \bar{\beta} f(u, v_2)$$

لكل $u,\ v_1, v_2 \in V$ و لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

الحل:

لدينا:

$$f(u, \alpha\, v_1 + \beta\, v_2) = \overline{f(\alpha\, v_1 + \beta\, v_2, u\,)}$$
$$= \overline{\alpha\, f(v_1, u) + \beta f(v_2, u\,)}$$
$$= \bar{\alpha}\overline{f(v_1, u)} + \bar{\beta}\overline{f(v_2, u\,)}$$
$$= \bar{\alpha} f(u, v_1) + \bar{\beta} f(u, v_2)$$

تعريف (8−3):

ليكن f شكلاً هرميتياً على الفضاء المتجهي V و ليكن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$أساساً للفضاء V. عندئذٍ نسمي المصفوفة $A = [a_{ij}]$، حيث $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ بالتمثيل المصفوفي

للشكل f في الأساس $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

من تعريف الشكل الهرميتي يكون لدينا $f(e_i, e_j) = \overline{f(e_j, e_i)}$. إذاً A مصفوفة هرميتية عناصر القطر أعداد حقيقية.

مثال (8−5):

ليكن f شكلاً هرميتياً على الفضاء المتجهي V على الحقل $\mathbb{C}$ وليكن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ أساساً للفضاء V. أثبت أن:

$$f(u, v) = X^T A \bar{Y}$$

الحل:

لدينا لكل $u, v \in V$

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j \, f\left(e_i, e_j\right)$$

$$= [x_1 \dots x_n].A.\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} = X^T A \bar{Y}.$$

نذكر الآن مبرهنة تماثل المبرهنة $(3-1)$ بالنسبة للأشكال الخطية المتناظرة.

مبرهنة $(8-2)$:

ليكن $f(u,v)$ شكلاً هرميتياً على الفضاء المتجهي V على الحقل $\mathbb{C}$. عندئذٍ يوجد أساس $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ للفضاء V، بحيث تكون مصفوفة الشكل $f(u,v)$ مصفوفة قطرية،

أي أن $f\left(e_i, e_j\right) = 0$ لكل $i \neq j$.

(6–9) الشكل الهرميتي التربيعي:

كما عرفنا من قبل الشكل التربيعي الحقيقي فإننا نعرف الآن الشكل الهرميتي التربيعي بأنه التطبيق:

$$q: V \to C$$

$$v \to f(u,v)$$

حيث $f(u,v)$ هو الشكل الهرميتي علV ويسمى q أيضاً شكلاً تربيعياً عقدياً مقرناً بالشكل الهرميتي f.

هذا ومن معرفة الشكل الهرميتي التربيعي $q(v)$ يمكن حساب الشكل الهرميتي $f(u,v)$ المقابل له وذلك كما يلي:

$$f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(v,v) + f(v,u) + f(v,v)$$

$$f(u-v, u-v) = f(u,u) - f(u,v) - f(v,u) + f(v,v)$$

وبالطرح ينتج:

$$f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v) = 2f(u,v) + 2f(v,u) \qquad (9-1)$$

وبطريقة مشابهة نجد:

$$f(u+iv,u+iv)=f(u,u)-if(u,v)+if(v,u)+f(v,v)$$

$$f(u-iv,u-iv)=f(u,u)+if(u,v)-if(v,u)+f(v,v)$$

وبالطرح ينتج:

$$f(u+iv,u+iv)-f(u-iv,u-iv) = 2if(v,u)-2if(u,v) \qquad (9-2)$$

نضرب الآن $(9-2)$ بـ i ونجمعها مع$(9-1)$ نجد:

$$[f(u+v,u+v)-f(u-v,u-v)] + i[f(u+iv,u+iv)-f(u-iv,u-iv)] = 4\,f(u,v)$$

أي أن:

$$f(u,v)=\frac{1}{4}\{[f(u+v,u+v)-f(u-v,u-v)] + i[f(u+iv,u+iv)-f(u-iv,-iv)]\}$$

أو بالشكل:

$$f(u,v)=\frac{1}{4}\{[q(u+v)-q(u-v)] + i[q(u+iv)-q(u-iv)]\} \qquad (9-3)$$

تسمى (3–9) بالشكل القطبي للشكل الهرميتي.

مثال (9–1):اكتب الشكل الهرميتي ثم الهرميتي التربيعي على $\mathbb{C}^2$ والذي مصفوفته

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1+2i\\ 1-2i & 3\end{bmatrix}$$

الحل: ليكن $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \mathrm{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ متجهين من $\mathbb{C}^2$ نحسب الشكل الهرميتي $f(u,v)$:

$$f(u,v)=X^T.A.\bar{Y}=[x_1\quad x_2].\begin{bmatrix}2 & 1+2i\\ 1-2i & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{bmatrix}$$
$$= [2x_1+(1-2i)x_2(1+2i)x_1 \quad +3x_2]\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{bmatrix}$$
$$=2x_1\overline{y_1}+(1-2i)x_2\overline{y_1}+(1+2i)x_1\overline{y_2}+3x_2\overline{y_2}$$

$$= 2x_1\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2} + (1-2i)x_2\overline{y_1} + (1+2i)x_1\overline{y_2}$$

أما الشكل الهرميتي التربيعي فهو:

$$q(x) = f(x,x) = [x_1 x_2].\begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix}$$
$$= 2x_1\overline{x_1} + 3x_2\overline{x_2} + (1-2i)x_2\overline{x_1} + (1 \quad +2i)x_1\overline{x_2}$$

تمارين محلولة

1–ليكن f الجداء الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^n$، أي أن:

$$f(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n;$$
$$u = (x_1, \dots, x_n),\ \ v = (y_1, \dots, y_n)$$

أثبت أن fشكل ثنائي الخطية.

الحل:

بما أن f خطي بالنسبة للمتغير الأول و الثاني. إذاً f شكل ثنائي الخطية.

2– هل يشكل التطبيق المعطى على الفضاء $\mathbb{R}^2$ شكلاً ثنائي الخطية أم لا؟

1) $f(u,v) = x_1y_2 - 5\,x_2y_1$

2) $f(u,v) = x_1 + y_2$

3) $f(u,v) = 2\,x_1y_1 + 3x_2y_2 + 1$

الحل:

1)إن كل حد في هذا الشكل يكتب بالصورة $a_{ij}x_iy_j$ وبالتالي فهو شكل ثنائي الخطية.

2) نلاحظ أن الحدود في هذا الشكل لا تكتب بالصورة $a_{ij}x_iy_j$ وبالتالي لا يشكل شكلاً ثنائي الخطية.

3) يوجد حد ثابت و الشكل ثنائي الخطية لا يمكن أن يكون له حد ثابت.

3− ليكن كل من الشكلين f و g ثنائي الخطية على الفضاء V على الحقل F.

أثبت أن $f+g$ المعطى بالعلاقة:

$$(f+g)(u,v)=f(u,v)+g(u,v)$$

هو شكل ثنائي الخطية.

الحل:

لدينا:

$$\begin{aligned}
&(f+g)(\alpha\, u_1+\beta\, u_2,v)=\\
&=f(\alpha\, u_1+\beta\, u_2,v)+g(\alpha\, u_1+\beta\, u_2,v)\\
&=\alpha\, f(u_1,v)+\beta f(u_2,v)+\alpha\, g(u_1,v)+\beta g(u_2,v)\\
&=\alpha\,[f(u_1,v)+g(u_1,v)]+\beta\,[f(u_2,v)+g(u_2,v)]\\
&=\alpha\,(f+g)(u_1,v)+\beta\,(f+g)(u_2,v).
\end{aligned}$$

و كذلك بالطريقة نفسها نجد أن:

$$\begin{aligned}
&(f+g)(u,\alpha\, v_1+\beta\, v_2)=\\
&=\alpha\,(f+g)(u,v_1)+\beta(f+g)(u,v_2).
\end{aligned}$$

إذاً $(f+g)$ شكل ثنائي الخطية.

4−أوجد مصفوفة الشكل ثنائي الخطية f على الفضاء $\mathbb{R}^2$ في الأساس

$\{e_1=(2,1),\ e_2=(1,-1)\}$، حيث:

$$f(u,v)=2\,x_1y_1-3\,x_1y_2+2\,x_2y_2$$

الحل:

لتكن $A=[a_{ij}]$ و $a_{ij}=f(e_i,e_j)$. إذاً:

$$a_{11} = f(e_1, e_1) = f\big((2,1),(2,1)\big)$$

$$= 2.2.2 - 3.2.1 + 2.1.1 = 4$$

$$a_{12} = f(e_1, e_2) = f\big((2,1),(1,-1)\big)$$

$$= 2.2.1 - 3.2.(-1) + 2.1.(-1) = 8$$

$$a_{21} = f(e_2, e_1) = f\big((1,-1),(2,1)\big)$$

$$= 2.1.2 - 3.1.1 + 2.(-1).1 = -1$$

$$a_{22} = f(e_2, e_2) = f((1,-1),(1,-1))$$

$$= 2.1.1 - 3.1.(-1) + 2.(-1).(-1) = 7$$

وبالتالي فإن مصفوفة الشكل f في الأساس $\{e_1,\ e_2\}$هي:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

5- أوجد الشكل ثنائي الخطية المتناظر $f(u,v)$ على$\mathbb{R}^3$ علماً أن الشكل التربيعي:

$$q: \mathbb{R}^3 \ \to \mathbb{R}$$

والمعرف بالشكل :

$$q(x, y, z) = xy + 2yz$$

الحل: نستطيع الحصول على $f(u,v)$ من الشكل القطبي أي:

$$f(u, v) = \frac{1}{2}[q(u + v) - q(u) - q(v)]$$

$$= \ \frac{1}{2}[q(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \ - q(x_1, x_2, x_3) - q(y_1, y_2, y_3)]$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + 2(x_2 + y_2)(x_3 + y_3) - x_1x_2 - 2x_2x_3 - y_1y_2 - 2y_2y_3]$$

بالإصلاح نجد:

$$f(u, v) = \ \frac{1}{2}(\mathrm{x}_1\mathrm{y}_2 + \mathrm{y}_1\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_2\mathrm{y}_3 + 2\mathrm{y}_2\mathrm{x}_3)$$

6–أوجد الشكل التربيعي $f(u,u)$ للمصفوفة المتناظرة:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

الحل:

إن معامل ${x_i}^2$ هو a_{ii} و كذلك معامل $x_i x_j$ هو $a_{ij}+a_{ji}=2a_{ij}$. إذاً

$$f(u,u)=\ 3{x_1}^2+4\,x_1x_2-4\,x_1x_3+5{x_2}^2+6\,x_2x_3+7\,{x_3}^2$$

7– أوجد الشكل التربيعي : $q:\mathbb{R}^3\ \rightarrow\mathbb{R}$ المرتبط بالشكل ثنائي الخطية

المتناظر : $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ والمعرف بالشكل التالي:

$$f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)]=x_1y_1-x_2y_3$$

الحل:

$$q(u)=q(x,y,z)=f[(x,y,z),(x,y,z)]=(x)(x)-(y)z=x^2-yz$$

8–اكتب الشكل التربيعي التالي على شكل مجموع حدود مربعة:

$$q(u)=4x_1^2-12x_1x_2+7x_2^2$$

$$=4(x_1^2-3x_1x_2)+7x_2^2=4\left(x_1^2-3x_1x_2+\frac{9}{4}x_2^2\right)+7x_2^2-9x_2^2$$

$$=4(x_1-\frac{3}{2}x_2)^2-2x_2^2$$

نضع : $y_2=x_2$, $y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2$ ويكون:

$$q(u)=f(u,u)=4y_1^2-2y_2^2$$

9–اكتب الشكل ثنائي الخطية المتناظر على الفضاء $\mathbb{R}^3$ والذي مصفوفته:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

بالنسبة لأساس نظامي في هذا الفضاء.

الحل: نلاحظ أن المصفوفة المفروضة متناظرة فالشكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^3$ والمقابل لها متناظر وهو:

$$f(u,v) = [x_1x_2x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_1y_2 - x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2$$

10–اكتب مصفوفة الشكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^4$ التالي وذلك بالنسبة

لأساس نظامي في هذا الفضاء ثم تحقق أنه متناظر وعين رتبته حيث:

$$f(u,v) = 2x_1y_1 - x_2y_2 + 4x_3y_3 - 10x_4y_4 - 5(x_1y_2 + y_1x_2) + 10(x_1y_3) - 9(x_2y_3 + x_3y_2) + 2(x_3y_4 + x_4y_3)$$

الحل:

$$f(u,v) = [x_1x_2x_3x_4]\begin{bmatrix} 2 & -5 & 10 & 0 \\ -5 & -1 & -9 & 0 \\ 10 & -9 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = X^T.A.Y$$

والمصفوفة A كما نرى متناظرة والشكل ثنائي الخطية متناظر كذلك فإن رتبة المصفوفة A تساوي4 وبالتالي $rank(f) = 4$

11–عين رتبة الأشكال ثنائية الخطية على $\mathbb{R}^3$ التالية:

$$1 - f(u,v) = f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)]$$
$$= 2x_1y_1 + 6x_3y_3 + 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 4x_1y_2 - 4x_3y_2 + 4x_2y_3$$

$$2 - g(u,v) = g\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big)$$
$$= x_2y_2 - 3x_2y_1 - x_1y_3 + 3x_2y_3 + x_3y_2$$

الحل:

(1)إن مصفوفة الشكل ثنائي الخطية f بالنسبة لأساس نظامي $\mathbb{R}^3$ هي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow rank(A) = 2$$

وبالتالي فإن : $rank(f) = 2$

(2) نوجد مصفوفة g بالنسبة لأساس نظامي في $\mathbb{R}^3$ وهي:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow rank(B) = 3$$

وبالتالي $rank(g) = 3$

12–ليكن التطبيق $\varphi: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ والمعرف بالشكل:

$$\varphi(u, v) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} = \sum_{i=1}^{3} x_i\overline{y_i}$$

حيث x_i, y_{ii} إحداثيات المتجهات u , v على الترتيب بالنسبة للأساس في الفضاء

العقدي $\mathbb{C}^3$

والمطلوب: أثبت أن φ ثلاثة أنصاف خطية.

الحل:

(1

$$\begin{aligned}\varphi(u_1 + u_2, v) &= (x_1 + x_1')\overline{y_1} + (x_2 + x_2')\overline{y_2} + (x_3 + x_3')\overline{y_3} \\ &= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + x_1'\overline{y_1} + x_2'\overline{y_{2s}} + x_3'\overline{y_3} \\ &= \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)\end{aligned}$$

(2

$$\varphi(\lambda u, v) = (\lambda x_1)\overline{y_1} + (\lambda x_2)\overline{y_2} + (\lambda x_3)\overline{y_3}$$

$$= ƛ(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}) = ƛ\,\varphi(u,v): \quad ƛ \in \mathbb{C}$$

(3

$$\varphi(u, v_1 + v_2) = x_1\overline{(y_1 + \acute{y}_1)} + x_2\overline{(y_2 + \acute{y}_2)} + x_3\overline{(y_3 + \acute{y}_3)}$$
$$= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + x_1\overline{\acute{y}_1} + x_2\overline{\acute{y}_2} + x_3\overline{\acute{y}_3} = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$$

(4

$$\varphi(u, ƛv) = x_1\overline{(ƛy_1)} + x_2\overline{(ƛy_2)} + x_3\overline{(ƛy_3)} = \bar{ƛ}(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3})$$
$$= \bar{ƛ}.\,\varphi(u,v), \quad ƛ \in \mathbb{C}$$

ومن *1*و*2*و*3*و*4* نجد أن φ هو ثلاثة أنصاف الخطية.

13–لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -2i \\ 1+i & 4 & 2+3i \\ 2i & 2-3i & 7 \end{bmatrix}$$

و المطلوب: 1) أثبت أن A مصفوفة هرميتية.

2) أوجد مصفوفة غيرشاذةS بحيث تكون المصفوفة $S^T A \bar{S}$ قطرية.

الحل:

1) إن:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -2i \\ 1+i & 4 & 2+3i \\ 2i & 2-3i & 7 \end{bmatrix} = A$$

إذاً المصفوفة A هرميتية.

2)نشكل المصفوفة الموسعة $[:I]$ فنجد أن:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -2i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 4 & 2+3i & 0 & 1 & 0 \\ 2i & 2-3i & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نجري العمليتين الأوليتين على السطرين التاليين:

$$r_3 \to -(2i)r_1 + r_3 \text{ و } r_2 \to -(1+i)r_1 + r_2$$

فنجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & -2i & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5i & \vdots & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 3 & \vdots & -2\mathrm{i} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

كما نجري العمليتين الأوليتين على العمودين:

$$c_3 \to -2ic_1 + c_3 \text{ و } c_2 \to (-1-i)\, c_1 + c_2$$

فنجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5i & \vdots & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 3 & \vdots & -2\mathrm{i} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ثم نجري العملية التالية على السطر: $r_3 \to 5ir_2 + 2r_3$ فيكون:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5i & \vdots & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & \vdots & 5-9\mathrm{i} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و نجري العملية التالية على العمود:

$$c_3 \to -5i\, c_2 + 2c_3$$

فنجد أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -38 & \vdots & 5-9\mathrm{i} & -5i & 2 \end{bmatrix}$$

نضع:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & 5-9\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -5i \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$S^T AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{bmatrix}$$

14− لتكن A مصفوفة هرميتية. أثبت أن الشكل fهرميتي على $\mathbb{C}^n$، حيث:

$$.f(u,v) = X^T A\bar{Y}$$

الحل:

لكل $u_1, u_2, v \in \mathbb{C}^n$ و لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ يكون:

$$f\big(\alpha u_1 + \beta\, u_2, v\big) = \big(\alpha X_1 + \beta\, X_2\big)^T A\bar{Y} =$$
$$= \alpha {X_1}^T A\bar{Y} + \beta\, {X_2}^T A\bar{Y} =$$
$$= \alpha f(u_1, v) + \beta\, f(u_2, v)$$

و كذلك فإن:

$$\overline{f(u,v)} = \overline{X^T A\bar{Y}} = \overline{(X^T A\bar{Y})^T} = \bar{\bar{Y}}^T \bar{A}^T \bar{X} =$$
$$Y^T A^* \bar{X} = Y^T A\bar{X} = f(v,u\,)$$

تمارين غير محلولة

1– بينأي من الأشكال التالية يكون ثنائي الخطية على الفضاء $\mathbb{R}^2$:

1) $f(u,v)=x.y$ ، 2) $f(u,v)=x$

3) $f(u,v)=x_1+y_2$ ، 4) $f(u,v)=2x_1y_1$

2–عبر عن الشكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ على الفضاء $\mathbb{R}^3$ بالشكل X^TAX:

1) $f(u,v)=2\,x_1y_1-\,x_1y_2+6\,x_2y_1-2\,x_2y_3+\,x_3y_3$

2) $f(u,v)=\,x_1y_1+2\,x_1y_3+5\,x_2y_2+3\,x_2y_3-6\,x_3y_1$

3) $f(u,v)=\,x_1y_1-2\,x_2y_2-7\,x_3y_3+5\,x_2y_3-7\,x_3y_2$

4) $f(u,v)=2\,x_1y_1-7\,x_1y_2-3\,x_2y_1+4x_2y_2+-\,x_3y_3$

3– ليكن الشكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ على الفضاء $\mathbb{R}^2$ التالي:

$$f(u,v)=\,x_1y_1-2\,x_1y_2+2\,x_2y_1+4\,x_2y_2$$

و المطلوب:

1) أوجد A مصفوفة f بالنسبة للأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^2$.

2) أوجد B مصفوفة f بالنسبة للأساس $\{e_1=(1,1),e_2=(1,2)\}$.

3) أوجد مصفوفة S الانتقال من الأساس القانوني إلى الأساس الآخر.

4) حقق صحة العلاقة $B=S^TAS$.

4–أوجد المصفوفة المتناظرة للأشكال ثنائية الخطية $f(u,v)$ على الفضاء $\mathbb{R}^3$ بالنسبة للأساس القانوني. و بين رتبة كل منها.

1) $f(u,v)=2\,x_1y_1+4\,x_1y_2+4\,x_2y_2+8\,x_2y_3+7x_3y_3$

2) $f(u,v) = 5x_1y_1 - 2\,x_1y_2 + 4x_1y_3 + 8\,x_2y_2 + 6\,x_3y_3$

3) $f(u,v) = 7\,x_1y_1 + 5x_2y_2 + 4\,x_1y_3 + 6\,x_2y_3 + 5\,x_3y_3$

-5 أوجد مصفوفة الشكل التربيعي التالي على $\mathbb{R}^4$:

1)

$$f(u,u) = 2{x_1}^2 - 4\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 + 7{x_2}^2 + 2\,x_2x_3 - 8x_2x_4 - 5\,{x_4}^2$$

2) $f(u,u) = 5{x_1}^2 + 2\,x_1x_2 + x_3x_4 + 2{x_3}^2 + 7\,{x_4}^2$

3) $f(u,u) = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - {x_4}^2 + 2\,x_2x_3 - 4\,x_3x_4$

-6 حول الشكل التربيعي التالي إلى مجموع حدود مربعة:

1) $f(u,u) = {x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 7{x_3}^2 + 4\,x_1x_3$

2) $f(u,u) = 5{x_1}^2 - 4{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 2\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 + 2\,x_2x_3$

3) $f(u,u) = {x_1}^2 - 2{x_2}^2 - 4\,{x_3}^2 + 6\,x_1x_2 - 4\,x_2x_3$

-7 اكتب الشكل التربيعي المقابل للمصفوفات

$$a)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad b)\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix},\quad c)\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ a & 0 & l & m\\ b & l & o & p\\ c & m & l & 0\end{bmatrix}$$

-8 أوجد مصفوفة الشكل الهرميتي في الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{C}^3$:

1) $f(u,v) = 2i\,x_1y_2 + (4+3i)x_1y_3 - 2i\,x_2y_1 + 3x_2y_2 + 10\,x_2y_3 + (4-3i)x_3y_1 + 10\,x_3y_2 + 5\,x_3y_3.$

2) $f(u,v) = 4\,x_1y_1 + (2+i)x_1y_2 + (2-i)x_2y_1 + 3\,x_2y_2 - 4\,x_3y_3.$

-9 اكتب الأشكال الهرميتية المقابلة للمصفوفات التالية:

$$a)\begin{bmatrix}2 & 3+i\\ 2-i & -1\end{bmatrix},\quad b)\begin{bmatrix}0 & 2i & 4+3i\\ -2i & 3 & 10\\ 4-3i & 10 & 5\end{bmatrix},$$

$$c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \\ 0 & 3+i & -3 \end{bmatrix}$$

10– بين أي من المصفوفات هرميتية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2-i & 1 & 3-i \\ 1 & 3+i & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2-3i & 3-2i \\ 2\ +3i & 7 & 4-2i \\ 3+2i & 4+2i & 6 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 2 & 2-i \\ 2+i & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4+i & -1+5i \\ -1-5i & 3 \end{bmatrix}$$

11 – بفرض أن: $A \in M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ عندها برهن أن:

1) $A + \acute{A}^T$ مصفوفة متناظرة.
2) $A + A^*$ مصفوفة هيرميتية.
3) $A - A^T$ مصفوفة متناظرة متخالفة.
4) $A - A^*$ مصفوفة هيرميتية متخالفة.

12 –ليكن الشكل f ثنائية الخطية على $\mathbb{R}^3$ المعرف بالعلاقة:

$$f(u,v) = 3x_2y_2 - 5x_1y_3 + 4x_3y_1$$

حيث :

$$u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$$

والمطلوب :

1-أوجد مصفوفة f بالنسبة للأساس:

$B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ في $\mathbb{R}^3$

2–أوجد $\acute{A}$ مصفوفة f بالنسبة للأساس النظامي في $\mathbb{R}^3$

3–أوجد مصفوفة الانتقال من الأساس B إلى الأساس النظامي ثم تحقق أن :

$$A = P^T .\ \acute{A} . P$$

الفصل السابع

المؤثرات الخطية على الفضاءات الإقليدية والواحدية

Linear Operators on Euclidean andunitarySpaces

نتناول في هذا الفصل دراسة المؤثرات الخطية على الفضاءات الإقليدية والواحدية، بمعنى أن الحقل الأساس هو إما الحقل الحقيقي R وإما الحقل المركب $\mathbb{C}$، وسوف نستخدم أيضاً حقيقة أن الضرب الداخلي على الفضاء الإقليدي R^n يمكن أن يعّرفبواسطة

$\langle u,v \rangle = u^T v$.وأن الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{C}^n$ يمكن أن يعّرف

بواسطة $\langle u,v \rangle = u^T.\bar{v}$. حيث u,v متجهان عموديان.

(7–1) المؤثر القرين (المرافق)

AdjointOperator

تعريف (1–1):

إذا كان $(V, \langle \ , \ \rangle)$ فضاءً متجهياً حقيقياً (عقدياً) منتهي البعد ذا جداء داخلي

(فضاءً واحدياً) وليكن f مؤثراً خطياً على v فإذا وجد مؤثر أخر T على V بحيث يكون:

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle \ ;\forall u, v \epsilon V$$

فإننا نسمي المؤثر T مؤثراً قريناً للمؤثر f ونرمز له بالرمز f^* بدلاً من T ويكون لدينا:

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u,f^*(v) \rangle \ (1\text{-}1)$$

مثال (1−1):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء R^2 مصفوفته بالنسبة لأساس نظامي هي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

عندها من أجل أي $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ من R^2 نستطيع أن نكتب:

$$\langle f(u), v \rangle = \langle (2x_1 + x_2, x_1 - x_2), (y_1, y_2) \rangle$$

$$= (2x_1 + x_2) y_1 + (x_1 - x_2) y_2$$

$$= x_1 (2y_1 + y_2) + x_2 (y_1 - y_2)$$

$$= \langle (x_1, x_2), (2y_1 + y_2, y_1 - y_2) \rangle$$

نلاحظ أن:

$$f^*(v) = f^*(y_1, y_2) = (2y_1 + y_2, 2y_1 - y_2)$$

ومنه:

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v \rangle$$

حيث f^* هو المؤثر الذي مصفوفته:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = A^T$$

أي أن مصفوفة f^*هي المنقول لمصفوفة المؤثر f وقد يتبادر للذهن أن نسمي المؤثر f^* بمنقول المؤثر f وهذا ممكن ولكن جميع المؤلفين يسمونه بالمؤثر القرين

(*Ad joint operator*)

مثال (1−2):

ليكن f مؤثراً على الفضاء $\mathbb{C}^2$مصفوفته بالنسبة لأساس نظامي في $\mathbb{C}^2$ هي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & +i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ هنا انه بفرض أن : $u = (u_1 , u_2)$, $v = (v_1 , v_2)$ من الفضاء $\mathbb{C}^2$فإن:

$$\langle f(u),v \rangle = \langle 2u_1 + i u_2 , (1+i) u_1+3u_2), (v_1+ v_2) \rangle$$

$$= (2u_1 + iu_2)\overline{v_1} + ((1+i)u_1 + 3u_2)\overline{v_2}$$

$$= u_1(2\overline{v_1} + (1+i)\overline{v_2}) + u_2(i\,\overline{v_1} + 3\overline{v_2})$$

$$= u_1\left(2\overline{v_1} + \overline{(1-i)v_2}\right) + u_2(\overline{-iv} + \overline{3v_2})$$

$$= \langle (u_1, u_2), (2v_1 + (1-i)v_2, -iv_1 + 3v_2) \rangle$$

$$= \langle u , f^*(v) \rangle$$

حيث f^* مؤثر خطي معرف بالشكل:

$$f^*(v_1,v_2)=(2v_1+(1-i)v_2, -iv_1 +3v_2)$$

والذي مصفوفته:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ -i & 3 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ مباشرة أن $B = A^*$ أي $B = \bar{A}^T$ أي أن مصفوفة f^* هي مرافق

المنقول للمصفوفة A

(في حال الفضاء الحقيقي فإن مرافق المصفوفة يساويها وتكون مصفوفة المؤثر

f^*تساوي منقول مصفوفة المؤثر f)

ملاحظة (1−1):

ليكن f مؤثراً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) المنتهي البعد V. عندئذٍ إذا كانت A مصفوفة المؤثر f بالنسبة لأساس متعامد منظم $S = \{e_1,\dots,e_n\}$ للفضاء V، فإن A^* هي مصفوفة المؤثر القرين f^* بالنسبة للأساس S ، حيث A^* هي المنقول المرافق للمصفوفة A (أو المنقول في حالة الحقل الحقيقي$\mathbb{R}$).

لتكن $A=\left[a_{ij}\right]$ و $A^*=\left[b_{ij}\right]$ مصفوفتين للمؤثرين f و f^* على الترتيب في الأساس S . وبالتالي فإن:

$$a_{ij}=\left\langle f\left(e_j\right),e_i\right\rangle \text{ و } b_{ij}=\left\langle f^*\left(e_j\right),e_i\right\rangle$$

ومنه نجد أن:

$$b_{ij}=\left\langle f^*\left(e_j\right),e_i\right\rangle=\left\langle \overline{e_j,f\left(e_i\right)}\right\rangle=\left\langle f\left(e_i\right),e_j\right\rangle=\overline{a_{ji}}$$

مثال (1−3):

لتكن المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1-i & 2i\\ 3 & 6+i & 2-i\\ 1+i & 2-i & 7+i\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد A^* و B^* .

الحل: لدينا

$$A^*=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1-i\\ 1+i & 6-i & 2+i\\ -2i & 2+i & 7-i\end{bmatrix}$$

و

$$B^*=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 7 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

مثال(1-4):

لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1-2i & 5-4i\\ 3+9i & 2+7i\end{pmatrix}\quad ,\quad B=\begin{pmatrix}3-7i & 7 & 3+i\\ -6i & 7-i & 2+3i\\ 3+i & 5+2i & 6+3i\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

والمطلوب أوجد A^*, B^*, C^*

الحل: لدينا

$$A^* = \begin{pmatrix} 1+2i & 3-9i \\ 5+4i & 2-7i \end{pmatrix},\ B^* = \begin{pmatrix} 3+7i & 6i & 3-i \\ 7 & 7+i & 5-2i \\ 3-i & 2-3i & 6-3i \end{pmatrix},$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

ملاحظة(1−2):

ليكن f^* مؤثراً قريناً للمؤثر f على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. عندئذٍ فإن f^* يكون مؤثراً خطياً.

بما أن f^* مؤثر قرين. إذاً فالعلاقة (1-1)محققة، وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \left\langle u, f^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \right\rangle &= \left\langle f(u), \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \right\rangle \\ &= \overline{\alpha_1}\left\langle f(u), v_1 \right\rangle + \overline{\alpha_2}\left\langle f(u), v_2 \right\rangle \\ &= \overline{\alpha_1}\left\langle u, f^*(v_1) \right\rangle + \overline{\alpha_2}\left\langle u, f^*(v_2) \right\rangle \\ &= \left\langle u, \alpha_1 f^*(v_1) + \alpha_2 f^*(v_2) \right\rangle \end{aligned}$$

لكل $u, v_1, v_2 \in V$ و $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

وبالتالي فإن:

$$f^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f^*(v_1) + \alpha_2 f^*(v_2)$$

أي أن المؤثر f^* خطي.

مبرهنة (1−1):

ليكن $\emptyset$ شكلاً خطياً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) $(V, \langle \; , \; \rangle)$ عندئذ يوجد متجه وحيد $u \in V$ يحقق العلاقة:

$$\emptyset(v) = \langle v, u \rangle ; \forall u \in V$$

البرهان:

ليكن $\{e_1, ..., e_n\}$ أساساً متعامداً منظماً للفضاء V. وليكن

$$u = \overline{\Phi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\Phi(e_n)} e_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi(e_i)}\, e_i$$

نأخذ الشكل الخطي φ على V المعرف بالشكل:

$$\varphi(v) = \langle v, u \rangle ; \forall v \in V .$$

عندئذ يكون:

$$\varphi(e_i) = \langle e_i, u \rangle = \left\langle e_i, \overline{\Phi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\Phi(e_n)} e_n \right\rangle = \left\langle e_i, \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi(e_i)}\, e_i \right\rangle = \Phi(e_i)$$

لكل $i = 1, ..., n$. إن $\varphi \equiv \Phi$.

لنثبت أن المتجه وحيد:

ليكن $v_1 \in V$، حيث $\Phi(v) = \langle v, v_1 \rangle$ لكل $v \in V$، وبالتالي $\langle v, v_1 \rangle = \langle v, u \rangle$، ومنه $\langle v, v_1 - u \rangle = 0$. بفرض أن $v = v_1 - u$. عندئذ يكون $\langle v_1 - u, v_1 - u \rangle = 0$، أي أن $v_1 - u = 0$ وهذا يكافئ أن $v_1 = u$ والمتجه u وحيد.

مبرهنة(1−2):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) المنتهي البعد V فوق K عندئذ فإن:

1− يوجد مؤثر خطي وحيد f^* بحيث إن :

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$$

من أجل كل $u, v \in V$ (أي أن f يمتلك قريناً)

2− إذا كانت A مصفوفة f بالنسبة لأساس متعامد ومنظم S لـ V فإن مصفوفة f^* بالنسبة للأساس S تكون A^* منقول مرافق A (أو A^T منقول المصفوفة A عندما يكون K حقيقياً)

البرهان:

1− ليكن v عنصراً اختيارياً ولكن مثبتاً في V ولنأخذ التطبيق :

$$V \to C$$

$$u \to \langle f(u), v \rangle$$

والذي هو شكلٌ خطيٌ على V وحسب المبرهنة (1−1) يوجد متجه وحيد $\acute{v} \in V$

بحيث يكون: $\langle f(u), v \rangle = \langle u, \acute{v} \rangle \; ; \forall u \in V$

نعرف التطبيق f^* على V كما يلي:

$$f^*: V \to V$$
$$f^*(v) = \acute{v} \; ; \forall v \in V$$

ويكون لدينا :

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle \; ; \; \forall u, v \in V \quad (2\text{-}1)$$

لنبرهن أن f^* مؤثر خطي:

$$\langle f(u), \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle = \langle u, f^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \rangle$$

ومنه الطرف الأيسر يساوي:

$$\overline{\alpha_1}\left\langle f(u), v_1 \right\rangle + \overline{\alpha_2}\left\langle f(u), v_2 \right\rangle =$$

وبتطبيق $(2-1)$:

$$\overline{\alpha_1}\left\langle u, f^*(v_1) \right\rangle + \overline{\alpha_2}\left\langle u, f^*(v_2) \right\rangle$$

$$= \left\langle u, \alpha_1 f^*(v_1) \right\rangle + \left\langle u, \alpha_2 f^*(v_2) \right\rangle$$

وذلك مهما يكن $\forall\, u \,\epsilon v$ وبالتالي ينتج لدينا:

$$f^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f^*(v_1) + \alpha_2 f^*(v_2)$$

وبالتالي f^* مؤثر خطي.

ولنبرهن أن f^* وحيد، لنفرض وجود مؤثر قرين آخر f_1^* يكون لدينا:

$$\left\langle f(u), v \right\rangle = \left\langle u, f^*(v) \right\rangle \quad (3\text{-}1)$$

$$\left\langle f(u), v \right\rangle = \left\langle u, f_1^*(v) > \right\rangle \quad (4\text{-}1)$$

ومن $(3-1)$ و $(4-1)$ ينتج أن:

$$\left\langle u, f^*(v) \right\rangle = \left\langle u, f_1^*(v) \right\rangle, \forall\, u, v \epsilon V$$

ومنه: $\left\langle u, (f^* - f_1^*)(v) \right\rangle = 0, \forall\, u, v \epsilon V$

ومنه : $f^* = f_1^*$ والمؤثر القرين وحيد.

2- إذا كان $S = \{ e_1, \ldots\ldots, e_n \}$ أساس متعامد ومنظم في V إن المصفوفتين: $A = [\, a_{ij} \,]$, $B = [b_{ij}]$ الممثلين لـ f, f^* على الترتيب في الأساس S تعطيهما العلاقتان:

$$a_{ij} = \left\langle f(e_i), (e_j) \right\rangle, \; b_{ij} = \left\langle f^*(e_i), e_j \right\rangle$$

وبالتالي:

$$b_{ij} = \langle f^*(e_j), e_i \rangle = \overline{\langle e_i , f^*(e_j) \rangle} = \overline{\langle f(e_i), (e_j) \rangle} = \overline{a_{ij}}$$

لذلك فإن $B=A^*$ وهذا يعني أن مصفوفة المؤثر القرين f^* بالنسبة لأساس نظامي تساوي مرافق منقول مصفوفة المؤثر f بالنسبة لذلك الأساس.

مثال (1−4):

احسب f^* المؤثر القرين للمؤثر الخطي f على R^3والمعرف بالشكل:

$$f(x, y, z) = (3x-z+y, -2x+y, z-4y)$$

الحل:

نحسب مصفوفة المؤثر f بالنسبة لأساس نظامي في R^3 والذي هو أساس متعامد ومنظم فتكون:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن A مصفوفة حقيقي إذاً نوجد A^T فقط:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$f^*(x,y,z)= (3x-2y, x+y-4z, -x+z)$$

مبرهنة(1−3):

ليكن f و g مؤثرين خطيين على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V.وبفرض أن $\alpha \in \mathbb{R}$عندئذ تكون العلاقات الآتية صحيحة:

1) $(f+g)^*=f^*+g^*$.

2) $(fg)^*=g^*f^*$

3) $(\alpha f)^*=\overline{\alpha}f^*$

4) $(f^*)^*=f$

5) $0^*=0$

6) $I^*=I$

7) $(f^*)^{-1}=(f^{-1})^*$ إذا كان f تقابلاً.

8) إذا كان $fg=gf$ وكان $f=f^*$ و $g=g^*$ ، فإن $(fg)^*=fg$.
والعكس صحيح.

البرهان:

1) لدينا

$$\langle (f+g)u,v\rangle=\langle f(u)+g(u),v\rangle=\langle f(u),v\rangle+\langle g(u),v\rangle$$
$$=\langle u,f^*(v)\rangle+\langle u,g^*(v)\rangle=\langle u,f^*(v)+g^*(v)\rangle$$
$$=\langle u,(f^*+g^*)(v)\rangle,\ \forall u,v\in V$$

ومن الوحدانية نجد أن $(f+g)^*=f^*+g^*$.

2) لدينا

$$\langle (fg)(u),v\rangle=\langle f(g(u)),v\rangle=\langle g(u),f^*(v)\rangle$$
$$=\langle u,g^*(f^*(v))\rangle=\langle u,(g^*f^*)(v)\rangle.$$

لكل $u,v \in V$. ومن وحدانية المؤثر القرين نجد أن $(f\ g)^* = g^* f^*$.

3) لدينا

$$\langle (\alpha f)(u), v\rangle = \langle \alpha f(u), v\rangle = \alpha \langle u, f^*(v)\rangle$$
$$= \langle u, \bar{\alpha}(f^*(v))\rangle = \langle u, (\bar{\alpha} f^*)(v)\rangle.$$

لكل $u,v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$. ومن وحدانية المؤثر القرين نجد أن

$$(\alpha f)^* = \bar{\alpha} f^* \ .$$

4) لدينا

$$\langle (f^*)^*(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle = \langle f^*(v), u\rangle = \langle v, f(u)\rangle$$
$$= \langle f(u), v\rangle,\ \forall u,v \in V$$

ومن الوحدانية نجد أن $(f^*)^* = f$.

5) لدينا

$$\langle 0(u), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0 = \langle u, 0\rangle = \langle u, 0(v)\rangle$$

لكل $u,v \in V$. إذاً $0^* = 0$.

6) لدينا

$$\langle I(u), v\rangle = \langle u, v\rangle = \langle u, I(v)\rangle$$

لكل $u,v \in V$. إذاً $I^* = I$.

7) ليكن f تقابلاً. عندئذ:

$$I^* = \left(f\, f^{-1}\right)^* = \left(f^{-1}\right)^* f^* = \left(f^*\right)^{-1} f^*.$$

إذاً $\left(f^*\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$.

8) من العلاقة $f\, g = g\, f$ و $f = f^*$ و $g = g^*$ ينتج أن:

$$\left(f\, g\right)^* = g^* f^* = g\, f = f\, g$$

العكس، إذا كان $f = f^*$ و $g = g^*$ و $\left(f\, g\right)^* = f\, g$، فإن:

$$f\, g = \left(f\, g\right)^* = g^* f^* = g\, f$$

مبرهنة(1−4):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V، وليكن U فضاءً جزئياً لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f. عندئذ المتمم العمودي $U^\perp$ يكون لامتغيراً بالنسبة للمؤثر القرين f^*.

البرهان:

نفرض أن $u \in U^\perp$. من أجل أي $v \in U$ يكون $f(v) \in U$، وبالتالي:

$$\left\langle f^*(u), v \right\rangle = \left\langle u, f(v) \right\rangle = 0,$$

أي أن $f^*(u) \in U^\perp$، وبالتالي فإن $U^\perp$ لامتغير بالنسبة للمؤثر f^*.

مبرهنة (1−5):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. عندئذ يتحقق مايلي:

1) $\operatorname{Im} f^* = \left(\operatorname{Ker} f\right)^\perp$

(2 $\operatorname{Im} f = \left(\operatorname{Ker} f^{*}\right)^{\perp}$

(3 $V = \operatorname{Im} f^{*} \oplus \operatorname{Ker} f$

(4 $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f^{*}$

البرهان:

لدينا من أجل $v \in \operatorname{Ker} f$

$$\left\langle f^{*}(u), v \right\rangle = \left\langle u, f(v) \right\rangle = 0, \ \forall u \in V$$

وبالتالي فإن $v \in \left(\operatorname{Im} f^{*}\right)^{\perp}$. إذاً

(1-2) $\operatorname{Ker} f \subseteq \left(\operatorname{Im} f^{*}\right)^{\perp}$

العكس، ليكن $v \in \left(\operatorname{Im} f^{*}\right)^{\perp}$. عندئذ يكون

$$0 = \left\langle f^{*}(u), v \right\rangle = \left\langle u, f(v) \right\rangle, \ \forall u \in V$$

وبالتالي $f(v) = 0$ ومنه $v \in \ker f$. إذاً

(1-3) $\left(\operatorname{Im} f^{*}\right)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} f$

من العلاقتين (1-2) و (1-3) نجد أن:

$$\operatorname{Im} f^{*} = \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}.$$

بالنسبة للمساواة في (2) فيمكن استنتاجها من المساواة في (1)وذلك بعد استبدال كل f بـ f^{*}.

– على الطالب أن يبرهن على 3) و4)كتمرين مع ملاحظة أن المساوتين(3)و(4) يمكن استنتاج إحداهما من الأخرى باستبدال f بـ f^{*}.

(7–2) المؤثر المتناظروالهرميتي

Symmetric and Hermitian Operators

تعريف (2–1):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. يقال عن المؤثر f بأنه متناظر

(هرميتي) إذا كان $f = f^*$. ويقال أيضا عن f إنه قرين لذاته.

مبرهنة(2–1):

ليكن f مؤثراً متناظراً (هرمينياً)على الفضاء V. ولتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر f.

عندئذ فإن λ عدد حقيقي.

البرهان:

ليكن $v \in V$ متجهاً غير صفري، وليكن $f(v) = \lambda v$. عندئذ يكون $\langle v, v \rangle$ موجباً. لدينا:

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle = \langle v, f^*(v) \rangle$$

$$= \langle v, f(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

وبما أن $\langle v, v \rangle \neq 0$. إذاً $\lambda = \bar{\lambda}$ و λ عدد حقيقي.

نتيجة (2–1):

1– القيم الذاتية لمصفوفة متناظرة حقيقية هي أعداد حقيقية.

2– القيم الذاتية لمصفوفة متناظرة هرميتية هي أعداد حقيقية.

مبرهنة (2−2):

ليكن f مؤثراً متناظراً (هرميتياً)على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. عندئذ تكون المتجهات الذاتية للمؤثر f المقابلة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة.

البرهان:

ليكن $u,v \in V$ متجهين ذاتيين للمؤثر f مقابلين للقيمتين الذاتيتين λ_1, λ_2 على الترتيب $\lambda_1 \neq \lambda_2$. عندئذ:

$$f(u) = \lambda_1 u$$
$$f(v) = \lambda_2 v$$

ومنه نجد أن:

$$\lambda_2 \langle v,u \rangle = \langle \lambda_2 v,u \rangle = \langle f(v),u \rangle = \langle v, f(u) \rangle$$
$$= \langle v, \lambda_1 u \rangle = \overline{\lambda_1} \langle v,u \rangle = \lambda_1 \langle v,u \rangle .$$

أي أن:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v,u \rangle = 0$$

وذلك لأن λ_1 عدد حقيقي،وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$. عندئذ يكون $\langle v,u \rangle = 0$.

نتيجة(2−2):

1−المتجهات الذاتية لمصفوفة هرميتية والمقابلة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة .

2−المتجهات الذاتية لمصفوفة حقيقية متناظرة والمقابلة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة .

ملاحظة (2−1):

يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الإقليدي (الواحدي) متناظراً (هيرمتياً) إذا وفقط إذا حققت مصفوفته A في أساس متعامد منظم الشرط $\left(A = A^*\right)$ $A = A^T$.

مثال (2−1):

احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة الهرميتية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & -2 \end{bmatrix}$$

الحل: المعادلة المميزة للمصفوفة الهرميتيةA هي:

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1-2i \\ -1+2i & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - g$$

ومنه القيم الذاتية لـ A هي: $\lambda_1 = 3 , \lambda_2 = -3$ والمتجهات المميزة لـ A معينة بالمعادلات:

$$(\lambda - 2)x_1 + (-1-2i)x_2 = 0$$

$$(-1+2i)x_1 + (\lambda+2)x_2 = 0$$

من أجل $\lambda_1 = 3$ نجد:

$$x_1 + (-1-2i)x_2 = 0$$

$$(-1+2i)x_1 + 5x_2 = 0$$

وبالحل نحصل على المتجه الذاتي: $v_1 = (1+2i, 1)$

وكذلك من أجل القيمة $\lambda_2 = -3$ نبدل بالمعادلات نجد:

$$\left.\begin{aligned} -5x_1 + (-1-2i)x_2 = 0 \\ (-1+2i)x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

وبالحل نحصل على المتجه الذاتي:$v_2 = (-1-2i, +5)$

ونلاحظ أيضاً أن:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = (1+2i)(-1+2i)+5=0$$

والمتجهان الذاتيان متعامدان لأنهما يقابلان قيمتين ذاتيتين مختلفتين.

ملاحظة (2−2):

إذا كان U فضاءً جزئياً من الفضاء V، وكان U لامتغيراً بالنسبة للمؤثر المتناظر (الهرميتي) f، فإن المتمم العمودي $U^{\perp}$ لامتغير بالنسبة للمؤثر f.

مبرهنة (2−3):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الحقيقي المنتهي البعد وغير الصفري V. عندئذ يوجد فضاء جزئي أحادي أو ثنائي البعد ولامتغير بالنسبة للمؤثر f.

البرهان:

ليكن $u \in V$ متجهاً ذاتياً للمؤثر f. عندئذ تشكل التغطية $L(u)$ (وهي عبارة عن الفضاء الذاتي المولد بالمتجه u) فضاءً جزئياً أحادي البعد من الفضاء V ولامتغير بالنسبة

للمؤثر f. ليكن المؤثر f لا يملك متجهات ذاتية. عندئذ ليس لكثيرة الحدود المميزة $\Delta(x)$ للمؤثر f جذور حقيقية. ندرس كثيرة الحدود الأصغرية $m(x)$ للمؤثر f.

بما أن $m(x) \mid \Delta(x)$، فإن $m(x)$ ليس لها جذور حقيقية، لكن أي كثيرة حدود درجتها أكبر من 2 تكون قابلة للتحليل على $\mathbb{C}$، وبالتالي فإن $m(x)$ تقبل القسمة على كثيرة حدود من الدرجة 2. ومنه $m(x)=c(x)b(x)$، حيث.

$$c(x) = x^2 + px + q \,;\, p, q \in \mathbb{C}$$

بما أن $\deg b(x) < \deg m(x)$، فإن $b(f) \neq 0$ مؤثر خطي غير صفري، لكن عندها يكون $b(f)(v)=U$ فضاءً جزئياً غير صفري. نضع $W = L(v, f(v))$

إن المتجه v لا يشكل متجهاً ذاتياًللمؤثر f ، وبالتالي فإن الفضاء الجزئي W يكون ثنائي البعد.

يتبقى لدينا إثبات أن الفضاء الجزئي Wلامتغير بالنسبة للمؤثر f .

نعبر عن المتجه v بالشكل $v = b(f)(u)$، حيث $u \in V$ و

$$c(f)=(v)=(c(f)b(f))(u)=m(f)(u)=0(u)=0$$

ومن جهة أخرى، فإن:

$$c(f)=(v)=f^2(v)+pf(v)+qv$$

وبالتالي يكون:

$$f^2(v)+pf(v)+qv=0,\ f^2(v)=-pf(v)-qv\in W$$

وبالتالي فإن الفضاء الجزئي W لامتغير بالنسبة للمؤثر f .

مبرهنة (2−4):

ليكن f مؤثراً متناظراً (هرميتياً) على الفضاء الإقليدي (الواحدي)المنتهي البعد V.

عندئذ يوجد فضاء جزئي أحادي البعد من الفضاء Vولامتغير بالنسبة للمؤثر f .

البرهان:

حسب المبرهنة (2−3)، يوجد فضاء جزئي $W \subseteq V$ أحادي أو ثنائي البعد ولامتغير بالنسبة للمؤثر f . إذا كان $\dim W = 1$. عندئذ يتم المطلوب. ليكن $\dim W = 2$. نرمز بـ f_1 لمقصور المؤثر f على الفضاء الجزئي W. إن f_1 مؤثرمتناظر (هرميتي)على الفضاء W. نختار أساساً متعامداً منظماً للفضاء W ويكون للمؤثر f_1 بالنسبة لهذا الأساس المصفوفة المتناظرة

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

على الحقل$\mathbb{R}$. يكون لكثيرة حدودها المميزة

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12})^2$$

جذوراً حقيقية، أي أنه يوجد للمؤثر f_1 متجهاً ذاتياً والذي يكون بدوره متجهاً ذاتياً للمؤثر f .

نتيجة (2−2):

ليكن f مؤثراً متناظراً (هرميتياً)على الفضاء الإقليدي (الواحدي)المنتهي البعد V. عندئذ يوجد أساس متعامد منظم للفضاء V يتألف من المتجهات الذاتية للمؤثر f .

مبرهنة (2−5):

لتكن A مصفوفة حقيقية متناظرة. عندئذ توجد مصفوفة متعامدة P ، بحيث تكون $B=P^{-1}AP=P^TAP$ مصفوفة قطرية.

البرهان:

نقوم بالبرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على بعد الفضاء V. إذا كان $\dim V=1$.

عندئذ تكون المبرهنة صحيحة. نفرض أن $\dim V=n>1$ ، حسب برهان المبرهنة

(2−4)، يوجد متجهٌ ذاتيٌ v_1 للمؤثر f ،وليكن U الفضاء الجزئي المولد بالمتجه v_1.

من كون v_1 متجهاً ذاتياً للمؤثر f. عندئذ يكون الفضاء الجزئي U في الفضاء V

لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f ، وبالتالي وحسب الملاحظة (2−2)،يكون المتمم العمودي $U^{\perp}$

لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f أيضاً.

إن المقصور f_1 للمؤثر f على الفضاء المتمم $U^{\perp}$ يشكل مؤثراً متناظراً، ويكون لدينا

$\dim U^{\perp}=n-1$ ، وبالتالي وحسب الفرض الاستقرائي يوجد أساس متعامد منظم

$S_1=\{u_2,...,u_n\}$ للفضاء $U^{\perp}$ مكون من المتجهات الذاتية للمؤثر f_1 ، وبالتالي للمؤثر f . نحول المتجه الذاتي $v_1 \in U$ إلى متجه وحدة بالشكل $u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$. بما أن:

$$\langle u_1,u_i \rangle = 0,\ i=2,...,n$$

وذلك لأن $u_i \in U^{\perp}$. عندئذ تشكل مجموعة المتجهات الذاتية $S_1=\{u_1,...,u_n\}$ أساساً متعامداً منظماً للفضاء V، وبالتالي فإن مركبات هذه المتجهات تشكل المصفوفة المتعامدة

المطلوبة.

مثال (2−2):

أوجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^T.A.P$ قطرية مع العلم أن:

$$A=\begin{bmatrix}2 & +4\\4 & 2\end{bmatrix}$$

الحل: إن كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمصفوفة A تعطى بالشكل:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4\\-4 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-2)-16$$
$$=\lambda^2-4\lambda+4-16=\lambda^2-4\lambda-12$$
$$=(\lambda+2).(\lambda-6)$$

والقيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1=-2\,,\lambda_2=6$ نبدل بالمعادلات المصفوفية:

$$[\lambda I-A]x=0 \text{ بـ } \lambda_1=-2$$

نجد:

$$\begin{bmatrix}-4 & -4\\-4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

بالحل: $x+y=0$ ومنه نجد أن القيمة الذاتية $\lambda_1=-2$ المتجه الذاتي المقابل هو:

$v_1=(-1,1)$

نوجد متجه الوحدة لـ v_1 نجد:

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

نعوض مرة أخرى في المعادلات المصفوفية $[\lambda I - A]x = 0$ بـ $\lambda_2 = 6$ نجد:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & +4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

بالحل نجد: $x-y=0$ ومنه

فإن المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 6$ هو $v_2=(+1,1)$

نوجد متجه الوحدة لـ v_2: $u_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

عندئذ تكون المصفوفة P معطاة بالشكل الآتي:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

وبالتالي: $P^T.A.P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

مثال (2–3):

لتكن المصفوفة الحقيقية المتناظرة:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^T.A.P$ قطرية

الحل: إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda - 27 = (\lambda-3)(\lambda+3)^2$$

وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي:

$$\lambda_1= \lambda_2=-3 \,,\, \lambda_3=3$$

لنوجد متجهين ذاتيين متعامدين يقابلان القيمة الذاتية $\lambda=-3$ نبدل بالمعادلات المصفوفية:

$$[\, \lambda I - A \,]x=0$$

فنجد:

$$-2x -2y- 2z=0$$

$$-2x -2y -2z=0$$

$$-2x -2y -2z=0$$

ويكون لنظام المعادلات الخطي المتجانس السابق حلان مستقلان، أحد الحلول هو:

$$v_1 = (1,-1,0)$$

نبحث عن حل ثانٍ $v_2 =(a,b,c)$ والذي يكون متعامداً مع v_1.

إذاً المتجه v_2 يحقق المعادلتين:

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \text{(شرط تعامد } v_1 \text{ مع } v_2\text{)}$$

بالحل نجد:

$$v_2 = (1,1,-2)$$

وبالتالي فإن المتجهين المقابلين للقيمة الذاتية المضاعفة $\lambda_1= \lambda_2=-3$ هما:

$$v_1 = (1,-1,0) \quad , v_2 = (1,1,-2)$$

مرة أخرى نعوض في المعادلات المصفوفية $[\lambda I-A]\, x = 0$ بـ $\lambda_3=3$ نجد:

$$4x -2y -2z =0$$

$$-2x +4y -2z =0$$

$$-2x -2y +4z = 0$$

والمتجه الذاتي المقابل للقيمة $\lambda_3=3$ هو $v_3=(1,1,1)$ وهذا المتجه يكون v_3 متعامداً مع v_1,v_2.

نوجد الآن متجهات الوحدة للمتجهات v_1,v_2,v_3 فنجد:

$$u_1=\frac{v_1}{||v_1||}=\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}\ ,u_2=\frac{v_2}{||v_2||}=\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}\ ,$$
$$u_3=\frac{v_3}{||v_3||}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي:

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

ويكون:

$$P^T.A.P=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

(3–7) المؤثرات المتناظرة المتخالفة:

تعريف (3–1):

ليكن f مؤثراً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. يقال إن f متناظر متخالف على V إذا كان $f^*=-f$.

مثال (3–1):

أثبت أن المؤثر f^*+f على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V يكون متناظراً (هرميتياً) على V.

الحل:

$$\left(f^*+f\right)^*=f^{**}+f^*=f+f^*=f^*+f\ .$$

مثال (3−2):

أثبت أن المؤثر $f^{*}-f$ على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V يكون متناظراً متخالفاً على V.

الحل: $\left(f^{*}-f\right)^{*}=f^{**}-f^{*}=f-f^{*}=-\left(f^{*}-f\right)$.

مثال (3−3):

بين أن أي مؤثر f على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V يكون مجموع مؤثرمتناظر (هرميتي) ومؤثر متناظر متخالف على V

الحل: نضع $S=\frac{1}{2}(f+f^{*})$, $u=\frac{1}{2}(f-f^{*})$

إذاً: $f=S+u$ حيث:

$$S^{*}=\tfrac{1}{2}(f+f^{*})=\tfrac{1}{2}(f^{*}+f^{**})=\tfrac{1}{2}(f^{*}+f)=S$$

و

$$u^{*}=\tfrac{1}{2}(f-f^{*})^{*}=\tfrac{1}{2}(f^{*}-f^{**})=\tfrac{1}{2}(f^{*}-f)=-\tfrac{1}{2}(f-f^{*})=-\tfrac{1}{2}(f-f^{*})=-u$$

أي أن S متناظر (هرميتي) و u متناظر متخالف.

مبرهنة (3−1):

ليكن f مؤثراً متناظراًهرميتياًمتخالفاً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. ولتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر f. عندئذ فإن λ تكون صفراً أو عدداً تخيلاً بحتاً.

البرهان:

ليكن u متجهاً ذاتياً للمؤثر f مقابلاً للقيمة الذاتية λ ، أي أن $f(u)=\lambda u$. بما أن $\langle u,u\rangle>0$، لأن u متجه ذاتي، فإن:

$$\langle f(u),u\rangle = -\langle u,f(u)\rangle$$

وبما أن: $f(u) = \lambda u$

نجد : $\lambda\langle u,u\rangle = -\bar{\lambda}\langle u,u\rangle$

أي أن: $(\lambda+\bar{\lambda})\langle u,u\rangle = 0$

وبالتالي : $\lambda+\bar{\lambda}=0$

أي أن λ عدد تخيلي بحت أو صفر.

مثال (3−4):

احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة الهرميتية *المتخالفة*

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - i & -1-i \\ -1+i & \lambda - 2i \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3i\lambda$$

ومنه فإن $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = 0$

نعين المتجهات الذاتية للمصفوفة A من المعادلتين:

$$(\lambda-i)\, u_1 - (1+i)\, u_2 = 0$$

$$(1-i)\, u_1 + (\lambda-2i)\, u_2 = 0$$

عندما $\lambda_1 = 3i$ فإن المتجه الذاتي هو $v_1=(1,1+i)$.

كذلك :عندما $\lambda_2 = 0$ نجد المتجه الذاتي $v_2=(-2, 1+i)$

تعريف (3−2):

نقول عن المصفوفة العقدية المربعة A إنها هيرميتية إذا كان $A = A^*$ ونقول عن A

إنهاهيرميتية متخالفة إذا كان $A = -A^*$

مثال (3−5):

المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة هيرمتية بينما المصفوفة

$B = \begin{pmatrix} 2i & -1+i \\ 1+i & i \end{pmatrix}$ هي مصفوفة هيرمتية متخالفة.

وإذا كانت المصفوفة A حقيقية فإن $\bar{A} = A$ وبالتالي المصفوفة الهرميتية متناظرة، كما تصبح المصفوفة الهيرمتية المتخالفة فهي متناظرة متخالفة.

مثال (3−6):

المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$ متناظرة ،

أما المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$ فهي متناظرة متخالفة.

− المبرهنة التالية تعطينا التكافؤ بين المصفوفات الهرميتية (المتخالفة) والمؤثر الخطي الهرميتي.

مبرهنة (3−2):

ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي (الهرميتي) منتهي البعد $(V, \langle , \rangle)$ ولتكن *A(f)* مصفوفة f بالنسبة لأساس منظم ومتعامد في V عندئذ تتكافئ القضايا التالية:

1) f هرميتي ⇔ المصفوفة *A(f)* هرميتية.

2) f هرميتي متخالف ⇔*A(f)* هرميتية متخالفة.

الإثبات:

1) إذا كان f هرميتياً فإن $f = f^*$ وبالتالي عندئذ يكون لدينا:
$A(f) = A(f^*) = (A(f))^*$ وبالتالي المصفوفة $A(f)$ هيرميتية.

الآن: إذا كانت المصفوفة $A(f)$ هيرميتية فإن $A(f) = [A(f)]^*$ وبالتالي يكون:

$A(f^*) = [A(f)]^* = A(f)$ ومنه $f = f^*$ أي أن f هيرميتي.

2) وإذا كان f هيرميتياً متخالفاً فإن $f = -f^*$ وبالتالي يكون:

$$[A(f^*)] = A(f^*) = A(-f) = -A(f)$$

أي أن المصفوفة $A(f)$ هيرميتية متخالفة.

– وإذا كانت $A(f)$ مصفوفة هيرميتية متخالفة فإن :

$$[A(f)]^* = -[A(f)]$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$A(f^*) = [A(-f)]$$

وأن: $[A(f)]^* = -[A(f)]$

وبالتالي يكون $f = -f^*$ وأن f هيرميتي متخالف

مثال(3–7):

ليكن المؤثر الخطي f على $\mathbb{C}^3$ المعرف بالصيغة:

$$f(u_1,u_2,u_3) = (2u_1-3iu_2, +3iu_1+2iu_3, 5u_3-2iu_2)$$

بين فيما إذا كان f هيرميتياً.

الحل:

نوجد أولاً مصفوفة المؤثر f بالنسبة لأساس نظامي في $\mathbb{C}^3$ فتكون:

$$A(f) = \begin{bmatrix} 2 & -3i & 0 \\ 3i & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 5 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A(f)$ هيرميتية وبالتالي المؤثر f هيرميتي.

مبرهنة (3−3):

ليكن f مؤثراً متعامداً على الفضاء الإقليدي V والذي بعده n. عندئذ يكتب V على شكل مجموع مباشر لفضاءات جزئية أحادية أو ثنائية البعد متعامدة مثنى مثنى ولا متغيرة بالنسبة للمؤثر f.

البرهان:

نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي على العدد n. إذا كان $n \leq 2$ ، فإن المبرهنة صحيحة.

ليكن $n > 2$ والمبرهنة صحيحة من أجل الفضاءات التي بعدها أقل من n.

ليكن U_1 فضاءً جزئياً لامتغيراً بالنسبة لـ f أحادي أو ثنائي البعد.عندئذ:

$$(2\text{-}1)\quad V = U_1 \oplus U_1^{\perp}$$

وكذلك فإن المتمم $U_1^{\perp}$ يكون لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f. نأخذ f_1 متعامداً على $U_1^{\perp}$.

بما أن $\dim U_1^{\perp} < \dim V = n$ ، فإنه حسب الفرض الاستقرائي يكون الفضاء الجزئي $U_1^{\perp}$ عبارة عن مجموع مباشر لفضاءات جزئية أحادية أو ثنائية البعد لامتغيرة بالنسبة للمؤثر f ومنه فإن:

$$(2\text{-}2)\quad U_1^{\perp} = U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$$

من المعادلتين (2-1) و (2-2) نجد أن:

$$(2\text{-}3)\quad V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$$

وبالتالي فإن العلاقة (3-2) تعطينا التحليل المطلوب للفضاء V إلى فضاءات جزئية لامتغيرة بالنسبة للمؤثر f .

(4–7) المؤثر المتعامد (الواحدي)

Orthogonal (Unitary) Operators

ندرس في هذه الفقرة صفاً من المؤثرات على الفضاءات الإقليدية والواحدية والتي تسمى المؤثرات المتعامدة والمؤثرات الواحدية على الترتيب.

تعريف(4–1):

المؤثر الخطي f على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V والذي يحافظ على الجداء الداخلي يسمى مؤثراً متعامداً (واحدياً)، أي أن:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle; \ \forall u, v \in V \qquad (4\text{-}1)$$

ملاحظة (4–1):

إن المؤثر المتعامد (الواحدي) هو مؤثر عكوس وذلك لأنه متباين. فإذا كان $v \epsilon ker f$

يكون لدينا :

بأخذ $u = v$ في (4–1) نجد:

$$\langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle = 0$$

وأن:

$$||f(v)|| = \sqrt{< f(v), f(v) >} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = ||v|| = 0$$

مثال(4–1):

ليكن المؤثر f على الفضاء R^2 والمعرف بالشكل:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y,x+y)$$

عندئذ فإن f مؤثر عمودي

الحل:

ليكن $u=(x_1,y_1)$; $v=(x_2,y_2)$ متجهان من $\mathbb{R}^2$عندها فإن:

$$\langle u,v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1, x_1+y_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-y_2, x_2+y_2) \right\rangle =$$

$$= ½ [(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(x_1+y_1)(x_2+y_2)$$

$$= ½[x_1 x_2-x_1 y_2-x_2 y_1+y_1 y_2+x_1 x_2+x_1 y_2+x_2 y_1+y_1 y_2]$$

$$= x_1 x_2+y_1 y_2$$

مبرهنة (4−1):

إذا كان f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) $(V,<,>)$عندئذ الشروط التالية متكافئة:

1− $f . f^* = f^*. f = I$ أي أن: $f^* = f^{-1}$

2− $\forall u,v \epsilon V, \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u,v \rangle$

3− $\forall u \epsilon V \ , \ ||f(u)|| = ||u||$

4− صورة أي أساس متعامد ومنظم في V وفق f هو أساس متعامد ومنظم فيV

الإثبات:

لنثبت أولاً: $1 \Leftrightarrow 2$

1⇐2) إذا كان: $\langle u,v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle$ نستنتج أن :

$\langle u,v \rangle = \langle u, f^* f(v) \rangle$

ومنه ينتج أن: $f^* f = I$ وبنفس الطريقة $f\ f^* = I$.

كما أنه من الواضح إثبات أن 2⇐1).

ثانياً: نثبت أن 2 ⇔3

2 ⇐ 3) بما أن $\langle u,v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle$ و $\forall u,v \epsilon v$ وبأخذ $u=v$ ينتج أن

$||f(u)|| = ||u||$ وهو المطلوب.

3 ⇐2 لدينا:

$$\langle u,v \rangle = \frac{1}{4}\{ \left[||u+v||^2 - ||u-v||^2\right] + i\ \left[||u+iv||^2 - ||u-iv||^2\right]\}$$

ولكن:

$$||u+v||^2 = ||f(u+v||^2 = ||f(u)+f(v)||^2$$

$$||u-v||^2 = ||f(u-v||^2 = ||f(u)-f(v)||^2$$

$$||u+iv||^2 = ||f(u+iv||^2 = ||f(u)+if(v)||^2$$

$$||u-iv||^2 = ||f(u-iv||^2 = ||f(u)-if(v)||^2$$

ومنه نستنتج أن:

$$\langle u,v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle$$

أي أن f عمودي (واحدي).

ثالثاً: 4⇔ 2

2 4⇐) بما أن :

$\forall u,v\epsilon V$ و, $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u,v \rangle$

فهي محققة من أجل أي أساس متعامد ومنظم $\{ e_1, e_2, \dots ,e_n \}$ ومنه:

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i , e_j \rangle = \delta_{ij}$$

والمتجهات $\{ f(e_1), f(e_2), \dots , f(e_n)\}$ متعامدة ومنظمة

$2\Rightarrow4$: لدينا:

$\forall u,v\epsilon V, \langle \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i , e_j \rangle = \delta_{ij}$ فإن:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,, \qquad v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

$$\rangle \langle f(u), f(v) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \,, \sum_{j=1}^{n} y_j \, f(e_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i \, \overline{y_j} \cdot \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \quad = \sum_{i,j} x_i \, \overline{y_j} = \langle u,v \rangle$$

وهذا يبرهن أن fعمودي و (واحدي)

تعريف (4−2):

نقول عن المصفوفة المربعة الحقيقية (العقدية) إنها مصفوفة عمودية (واحدية) إذا حققت العلاقة:

$$A \,.\, A^* = A^* \,.\, A = I$$

مثال (4−2):

إن المصفوفة $A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix}$ واحدية وذلك لأن :

$$A \,.\, A^* = A^* \,.\, A = I$$

مبرهنة(4−2):

ليكن f مؤثراً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. عندئذ يكون f متعامداً (واحدياً) على V إذا وفقط إذا كانت مصفوفته بالنسبة لأساس متعامد منظم للفضاء V متعامدة (واحدية).

البرهان: أولاً: إذا كان المؤثر f عمودياً (واحدياً) فإن:

$$f^* = f^{-1}$$

وبفرض أن A مصفوفة f بالنسبة لأساس متعامد ومنظم في هذا الفضاء فإن:

$$M(f^*) = M(f^{-1}) = [M(f)]^* = [M(f)]^{-1} \Rightarrow A^* = A^{-1} \Rightarrow A.A^* = A^*.A = I$$

والمصفوفة A عمودية (واحدية)

ثانياً: إذا كانت المصفوفة A واحدية فإن $A^* = A^{-1}$:

$$M(f^*) = [M(f)]^* = A^* = A^{-1} = [M(f)]^{-1} = M(f^{-1})$$

ومنه:

$f^* = f^{-1} \Rightarrow$. f (عمودي) واحدي

مثال (4−3):

ليكن f مؤثراً على الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ ومعطى بالعلاقة:

$$f(x, y, z) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, z)$$

والمطلوب: أثبت أن f متعامد.

الحل:

إن طول المتجه لا يتغير نتيجة الدوران f وبالتالي فإن المؤثر f يكون متعامداً.

مبرهنة(4−3):

ليكن f مؤثراً متعامداً (واحدياً) على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. ليكن U فضاءً

جزئياً لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f أيضاً.

البرهان:

حسب المبرهنة (4−1)،يكون المتمم العمودي $U^{\perp}$ لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f^{*} .

بما أن المؤثر f متعامد (واحدي) على V. عندئذ، حسب العلاقة (3-2)، يكون $f\ f^{*}=I$ ، أي أن $f^{*}=f^{-1}$ ، وبالتالي فإن المتمم العمودي $U^{\perp}$ يكون لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f^{-1} ومنه فإن $U^{\perp}$ يكون لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f .

مبرهنة(4−4):

ليكن f مؤثراً متعامداً (واحدياً) على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V، ولتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر f . عندئذ فإن $|\lambda|=1$.

البرهان:

ليكن u متجهاً ذاتياً مقابلاً للقيمة الذاتية λ . عندئذ $f\ (u)=\lambda u$ ، وبالتالي $\langle u,u\rangle>0$. لدينا

$$\langle u,u\rangle=\langle f\ (u),f\ (u)\rangle=\langle \lambda u,\lambda u\rangle=\lambda\,\lambda^{-1}\langle u,u\rangle$$

وبالتالي $\langle u,u\rangle=\lambda\,\lambda^{-1}\langle u,u\rangle$ ، وبما أن $\langle u,u\rangle>0$. إذاً $\lambda\,\lambda^{-1}=1$ ، ومنه $|\lambda|=1$.

نتيجة(4−1):

لتكن A مصفوفة متعامدة. عندئذ يكون:

$$|A|=\pm 1$$

البرهان:

من العلاقة $A^{T}A=I$ ، حيث I المصفوفة المحايدة، وبالتالي فإن $|A^{T}A|=1$، لكن

$$\left|A^T A\right| = \left|A^T\right|\left|A\right| = \left|A\right|\left|A\right| = \left|A\right|^2 = 1$$

ومنه ينتج أن $|A| = \pm 1$.

مبرهنة (4−5):

ليكن f مؤثراً متعامداً على الفضاء الإقليدي V الذي بعده 2. عندئذ تكون مصفوفة f في أساس متعامد منظم للفضاء V إما من الشكل:

(4-2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

أو من الشكل:$(4-3)$ $\begin{bmatrix} cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \varphi \in \mathbb{R}$

البرهان:

نفرض أن A مصفوفة المؤثر f في أساس متعامد منظم لـ V. عندئذ فإن $|A| = \pm 1$ وذلك حسب النتيجة (3−1).

بداية ليكن $|A| = -1$. عندئذ تكون كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ من الشكل $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda - 1$ جذورها حقيقية ومختلفة. أي أن للمؤثر المتعامد f توجد قيمتان ذاتيتان وحسب المبرهنة (3−3)، فإن $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$.

نفرض أن e_1 و e_2 متجهان ذاتيان مقابلان للقيمتين الذاتيتين λ_1 و λ_2 على

الترتيب، كذلك نعتبر أن $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$. نبين أن المتجهين e_1 و e_2 متعامدان.

لدينا

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle = \langle \lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2 \rangle = -\langle e_1, e_2 \rangle = 0$$

إذاً e_1 و e_2 أساس متعامد منظم للفضاء V ومصفوفة المؤثر f في هذا الأساس من الشكل (4-3).

نفرض الآن أن $|A|=1$. إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فإن:

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=1 \\ c^2+d^2&=1 \\ ac+bd&=0 \\ ad-bc&=1 \end{aligned} \qquad (4-4)$$

إذا كان $a=0$. عندئذ يكون $b^2=1$ ومنه $b=\mp 1$ وحسب المعادلة الأخيرة في

$(4-4)$ نجد أن $-bc=1$ ، أي أن $c=\pm 1$ ، ومن المعادلة الثانية في

$(4-4)$ نجد أن $1+d^2=1$ ، ومنه $d=0$ ، وبالتالي يكون:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ أو } A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفرض أن $a\neq 0$ عندئذ من العلاقة $(4-4)$ نجد أن $c=\dfrac{-bd}{a}$ ومنه نجد:

$$\frac{b^2d^2}{a^2}+d^2=1 \Rightarrow b^2d^2+a^2d^2=a^2 \Rightarrow \left(b^2+a^2\right)d^2=a^2;$$

وبما أن $a^2+b^2=1$. إذاً $a^2=d^2$ ويكون $a=d$ أو $a=-d$. إذا كان

$a=-d$ ، فإن $c=b$ ويكون $-a^2-c^2=1$ وهذا تناقض. إذاً $a=d$ ، ومنه

$b=-c$ ونحصل على المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$$

من المعادلة الأولى في $(4-4)$ لدينا $a^2+c^2=1$. عندئذ يوجد عدد حقيقي φ بحيث يكون $a=\cos\varphi,\ b=\sin\varphi$. عندئذ يكون للمصفوفة A الشكل $(4-3)$ وهو المطلوب.

مبرهنة (4−6):

ليكن f مؤثراً متعامداً على الفضاء الإقليدي V الذي بعده 2. عندئذ يوجد أساس متعامد منظم للفضاء V، بحيث تكون مصفوفة المؤثر f في هذا الأساس من الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix} & & & \\ & & \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{bmatrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

البرهان:

حسب المبرهنة (3−3)،يكتب الفضاء V بشكل مجموع مباشر لفضاءات جزئية متعامدة

أحادية أو ثنائية البعد لامتغيرة بالنسبة للمؤثر f ، أي أن:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$$

كما أن مقصور f على كل فضاء جزئي U_i ، $1 \le i \le k$ يكون مؤثراً عمودياً، وبالتالي

وحسب المبرهنة (4−5)، يوجد أساس متعامد منظم للفضاءات الجزئية U_i ، $1 \le i \le k$ ،

بحيث تكون المصفوفة A_i من الشكل ± 1 إذا كان الفضاء U_i أحادي البعد، ومن الشكل

(4-2) أو (4-3) إذا كان الفضاء U_i ثنائي البعد. وبالتالي فإن اجتماع جميع الأسس

للفضاءات الجزئية يعطي أساساً للفضاء V وتكون مصفوفة المؤثر f في هذا الأساس

عبارة عن مصفوفة الخلايا القطرية.

$$A = \text{diag}\left[A_1, A_2, \dots A_k\right],$$

بإجراء الترتيب المناسب لمتجهات الأساس نحصل على الأساس المطلوب.

نتيجة (4−2):

لتكن A مصفوفة متعامدة مرتبتها n . عندئذ فإن A تشابه مصفوفة متعامدة من الشكل $(4-4)$.

البرهان:

نختار أساساً متعامداً منظماً للفضاء الإقليدي V والذي بعده n ، وليكن f مؤثراً على V

مصفوفته في الأساس المتعامد المنظم هي A . حسب المبرهنة (4−2)،يكون f متعامداً،

وبالتالي وحسب المبرهنة (4−6)، يوجد أساس منظم للفضاء V ، بحيث تكون مصفوفة

المؤثر f من الشكل $(4-4)$. لتكن S مصفوفة الانتقال من الأساس الأول إلى

الأساس الثاني، فإن $B = S^{-1}AS$ ، بالإضافة لذلك فإن مصفوفة الانتقال من أساس متعامد منظم إلى أساس متعامد منظم آخر هي مصفوفة متعامدة. عندئذ يتم المطلوب.

مثال (4−4):

أوجد مصفوفة متعامدة A ، إذا علمت أن سطرها الأول $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

الحل:

نوجد متجهاً غير صفري $u_2 = (x_1, y_1, z_1)$ يتعامد مع u_1، أي أن:

$$0 = \langle u_1, u_2 \rangle = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow u_2 = (0, 1, -1)$$

نوجد متجهاً آخر غير صفري $u_3 = (x_2, y_2, z_2)$ يتعامد مع u_1 و u_2، أي أن:

$$0 = \langle u_1, u_3 \rangle = \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{y_2}{\sqrt{3}} + \frac{z_2}{\sqrt{3}} = 0$$

$$0 = \langle u_2, u_3 \rangle = \frac{y_2}{\sqrt{2}} - \frac{z_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 0 \Rightarrow y_2 - z_2 = 0 \Rightarrow y_2 = z_2$$

ومن المعادلة الأولى نجد أن $u_3 = (2, -1, -1)$.

نوجد متجه الوحدة لـ u_3 فنجد أن:

$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

وتكون المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

المبرهنة التالية تبين صحة التكافؤ بين مصفوفة الانتقال من أساس إلى أساس آخر وبين مصفوفة واحدية (عمودية) .

مبرهنة (4−7):

ليكن $S=\{u_1, \ldots, u_n\}$ أساس متعامد ومنظم في فضاء إقليدي (واحدي) $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ وليكن $\grave{S}=\{v_1, \ldots, v_n\}$ أساساً ثانياً ولتكن A مصفوفة الانتقال من الأساس $\grave{S}$ إلى الأساس S عندئذ الشرطان التاليان يكونان متكافئين:

1) الأساس $\grave{S}$ أساس متعامد ومنظم في V.

2) المصفوفة A عمودية (واحدية).

الإثبات:

1) ⇐ 2) بما أن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة الانتقال من الأساس $\grave{S}$ إلى الأساس S فإن:

$$I(v_i) = v_i = \sum_{t=1}^{n} a_{ti}u_t \ ; \quad I(v_j) = v_j = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}u_l$$

وبالتالي يكون:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle \sum_{t=1}^{n} a_{ti}u_i \cdot \sum_{l=1}^{n} a_{lj}u_l \rangle$$

$$= \sum_{t,l} a_{ti}\,\overline{a_{lj}} \left\langle u_t, u_l \right\rangle = \sum_{t,l} a_{ti}.\,\overline{a_{ij}}\,.\,\delta_{tl}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{ti}\,\overline{a_{lj}} = \sum_{l=1}^{n} a'_{il}\bar{A}_{lj} = (A^T.A)_{(i,j)} \;;\; A^T = [\;a'_{il}\;]$$

وبالتالي إذا كان الأساس $\grave{S}$متعامداً ومنظماً في V فإن $v_i, v_j \left\langle \right. = \delta_{ij} \left. \right\rangle$ ومنه:

$$\delta_{ij} = \left\langle v_i, v_j \right\rangle = (A^T.\bar{A})_{ij} \Longrightarrow A^*.A = I$$

وبالتالي المصفوفة A عمودية (واحدية)

2) $1\Leftarrow$) وبما أن 2) محققة أي أن المصفوفة A عمودية (واحدية) فإن

$(A^T.\bar{A})_{ij} = \delta_{ij}$ وبالتالي فإن: $\left\langle v_i, v_j \right\rangle = \delta_{ij}$ وهذا يعني أن الأساس $\grave{S}$أساس متعامد ومنظم.

مثال (4−5):

أوجد مصفوفة الانتقال من الأساس $\grave{S}$ إلى الأساس S علماً أن $S=\{e_1, e_2\}$ أساس قانوني في الفضاء $\mathbb{R}^2$و $\grave{S} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \right\}$

الحل:

بسهولة نجد أن الأساسين $\grave{S}$, S متعامدين ومنظمين من أجل إيجاد مصفوفة الانتقال من الأساس لدينا :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right) &= \frac{\sqrt{5}}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 \\ \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) &= -\frac{2}{3}e_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}e_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

إن A هي مصفوفة الانتقال من الأساس $\grave{S}$ إلى الأساس S وللتأكد من أن المصفوفة A عمودية نجد أن:

$$A.A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & +\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5–7) المؤثرات الموجبة والمعرفة الموجبة

Positive and Define Positive Operators

تعريف (5–1):

ليكن f مؤثراًعلى الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. يقال إن f مؤثر موجب إذا كان $f = g^*g$ ، حيث g مؤثر على V.

كما يقال أن f مؤثر معرف موجب إذا كان حقق الشرط $f = g^*g$ ، وكان المؤثر g عكوساً.

مثال (5–1):

ليكن f مؤثراً موجباً (معرفاً موجباً) على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. عندئذ f متناظر (هرميتي).

الحل:

بما أن $f = g^*g$ من أجل مؤثر g . عندئذ يكون:

$$f^* = \left(g^*g\right)^* = g^*g^{**} = g^*g = f$$

إذن f متناظر (هرميتي).

مبرهنة (5−1):

ليكن f مؤثراً موجباً على الفضاء الإقليدي V، ولتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر f. عندئذ λ عدداً حقيقياً غير سالب.

البرهان:

حسب المبرهنة (2−1)،يكون λ عدداً حقيقياً. ليكن u متجهاً ذاتياً للمؤثر f مقابلاً للقيمة الذاتية λ، أي أن $f(u)=\lambda u$، وبالتالي فإن $\langle u,u\rangle$ موجب. لدينا $f=g^*g$، حيث g مؤثر على V. وكذلك فإن:

$$\lambda\langle u,u\rangle=\langle \lambda u,u\rangle=\langle f(u),u\rangle=\langle g^*g(u),u\rangle=\langle g(u),g(u)\rangle$$

أي أن:

$$\lambda\langle u,u\rangle=\langle g(u),g(u)\rangle,$$

حيث $\langle u,u\rangle>0$ و $\langle g(u),g(u)\rangle\geq 0$. وبالتالي فإن λ عدد غير سالب (موجب).

مبرهنة (5−2):

ليكن f مؤثراًعلى الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. عندئذ فإن الشروط الثلاثة الآتية متكافئة:

1) $f=g^2$، حيث g مؤثر متناظر (هرميتي).

2) $f=g^*g$، حيث g مؤثر على V.

3) f متناظر (هرميتي) و $\langle f(u),u\rangle\geq 0$ لكل متجه غير صفري $u\in V$.

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$ نفرض أن $f = g^2$، حيث $g = g^*$ وبالتالي $f = g\,g = g^*g$.

$2 \Leftarrow 3$ نفرض أن $f = g^*g$. حسب المثال (5−1) لدينا $f = f^*$ ، أي أن f متناظر، وكذلك فإن

$$\langle f(u),u\rangle = \langle g^*g(u),u\rangle = \langle g(u), g(u)\rangle$$

إذاً $\langle g(u), g(u)\rangle \geq 0$.

$3 \Leftarrow 1$ نفرض أن f متناظر. عندئذ يوجد أساس متعامد منظم $S = \{e_1,...,e_n\}$ للفضاء V مؤلف من المتجهات الذاتية للمؤثر f، وبالتالي $f(u_i) = \lambda_i u_i$، حيث $1 \leq i \leq n$. بما أن المؤثر g يعطى بدلالة مصفوفة قطرية حقيقية في أساس متعامد منظم للفضاء V، فإن g يكون مؤثراً متناظراً (هرميتياً) وكذلك فإن:

$$g^2(u_i) = g\left(\sqrt{\lambda_i}\,u_i\right) = \sqrt{\lambda_i}\,g(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i}\,u_i$$
$$= \sqrt{\lambda_i}\,u_i = f(u_i), 1 \leq i \leq n$$

وبالتالي فإن $f = g^2$.

نورد المبرهنة التالية بدون برهان والتي تعرف المؤثر الموجب والمعرف الموجب بدلالة مصفوفة المؤثر.

مبرهنة (5−3):

لتكن المصفوفة المركبة:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

عندئذ فإن A تمثل مؤثراً موجباً (معرفاً موجباً) إذا وفقط إذا كانت A متناظرة (هرميتية) وكانت الأعداد a, d , $|A|=ad-bc$ أعداداً حقيقية غير سالبة (موجبة).

مثال (5−2):

بين فيماإذا كانت المصفوفات التالية موجبة، معرفة موجبة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & i\\ -i & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$,D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}2 & -3i\\ 3i & 2\end{pmatrix}$$

الحل:

الحل: اعتماداً على المبرهنة (5−3) يكون لدينا:

− لدينا $|A|=0$ فإن A ليست معرفة موجبة ومع ذلك فإن A موجبة لأن $|A|=0\,,a=1\,,d=1$ أعداد غير سالبة.

− بما أن $|B|=8\,,a=3\,,d=3$ أعداد موجبة إذاً B تكون معرفة موجبة وبالتالي موجبة.

− بما أن C ليست متناظرة أي أن $C^T\neq C$ فإن C ليست معرفة موجبة وليست موجبة.

− بما أن $|D|=8\,,a=3\,,d=3$ أعداد موجبة فإن D تكون معرفة موجبة وبالتالي موجبة.

− بما أن $|E|=0$ فإن E ليست معرفة موجبة ومع ذلك بما أن

$|E|=0\,,a=1\,,d=1$ أعدادغير سالبة فهي موجبة .

بما أن: $|F|=-5$ فإن F ليست معرفة موجبة وليست موجبة .

نورد مبرهنة مكافئة للمبرهنة (5−2) وتتعلق بالمؤثرات المعرفة الموجبة وبرهانها يتم بالطريقة نفسها التي برهنا فيها المبرهنة (5−2).

مبرهنة (5−4):

ليكن f مؤثراًعلى الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. عندئذ تكون العلاقات الآتية متكافئة:

1) $f = g^2$ ، حيث g مؤثر غير صفري متناظر (هرميتي).

2) $f = g^* g$ ، حيث g مؤثر عكوس على V.

3) f متناظر (هرميتي) و $\langle f(u), u \rangle \geq 0$ لكل متجه غير صفري $u \in V$.

تعريف (5−2):

ليكن f مؤثراًعلى الفضاء الإقليدي (الواحدي) V معطى بالعلاقة $f = g^2$ ، حيث g مؤثر غير صفري متناظر. إن g يشكل مؤثراً معرفاً موجباً وحيداً يسمى الجذر التربيعي الموجب للمؤثر f.

نتيجة (5−1):

لتكن A مصفوفة قطرية. عناصرها أعداد حقيقية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. عندئذ تكون A مصفوفة معرفة موجبة.

البرهان:

نأخذ مصفوفة قطرية B ، بحيث تكون عناصرها $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}$. عندئذ فإن $A = B^2$ ، حيث B مصفوفة متناظرة وعكوسة وبالتالي فإن A معرفة موجبة.

(6–7) المؤثر الناظمي

Normal Operators

تعريف (6–1):

ليكن f مؤثراًعلى الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. نسمي f مؤثراًناظمياً إذا كان f متبادلاً مع قرينه، أي أن:

$$f\,f^{*}=f^{*}f$$

وإذا كانت A مصفوفة المؤثر f بالنسبة لأساس متعامد ومنظم في الفضاء V فإن A تحقق العلاقة : A. A* = A*. A

مبرهنة (6–1):

لتكن A مصفوفة المؤثر f في أساس متعامد منظم للفضاء V. عندئذ يكون المؤثر f ناظمياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\langle f(u),f(v)\rangle=\langle f^{*}(u),f^{*}(v)\rangle,\ \forall u,v\in V \qquad (6-1)$$

البرهان:

بما أن:

$$\langle f(u),f(v)\rangle=\langle u,f^{*}f(v)\rangle$$

وكذلك:

$$\langle f^{*}(u),f^{*}(v)\rangle=\langle u,f\,f^{*}(v)\rangle$$

إذا كان f مؤثراً ناظمياً فإن $f\,f^{*}=f^{*}f$ والعلاقة $(5-1)$ صحيحة.

العكس: إذا كانت العلاقة $(6-1)$ صحيحة. عندئذ يكون:

$$\langle u, f^*f(v)\rangle = \langle u, f f^*(v)\rangle, \forall u,v \in V$$

وبالتالي فإن $f f^* = f^*f$ والمؤثر f ناظمي.

مثال (6−1):

ليكن f مؤثراًخطياً على الفضاء الواحدي $\mathbb{C}^3$ مصفوفته في الأساس القانوني من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & -1 & 0 \\ -1 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{bmatrix}$$

أثبت أن المصفوفة A ناظمية.

الحل:

واضح أن $A A^* = A^*A$ وبالتالي فإن المصفوفة A ناظمية.

مثال (6−2):

أثبت أن المؤثر المتناظر والمتعامد(الواحدي) يكون ناظمياً.

الحل:

بما أن $f = f^*$ ، وبالتالي $f f^* = f f = f^*f$. كما أنه لدينا $f^* = f^{-1}$ ، وبالتالي $f f^* = I = f^*f$.

نتيجة (6−1):

ينتج من المبرهنة (6−1) أن $f(u) = 0$ إذا وفقط إذا كان $f^*(u) = 0$ لكل $u \in V$.

مثال (6−3):

أثبت أن المؤثر $f - \lambda I$ ناظمي.

الحل:

لدينا:

$$\begin{aligned}(f-\lambda I)(f-\lambda I)^* &= (f-\lambda I)\left(f^*-\bar{\lambda} I\right) \\ &= f f^* - \bar{\lambda} f - \bar{\lambda} f^* + \lambda\bar{\lambda} I \\ &= \left(f^*-\bar{\lambda} I\right)(f-\lambda I) = (f-\lambda I)^*(f-\lambda I)\end{aligned}$$

مثال (6−4):

ليكن u متجهاً ذاتياً للمؤثر f على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. أثبت أن u متجه ذاتي للمؤثر القرين f^*.

الحل:

من تعريف المتجه الذاتي للمؤثر f يكون لدينا $f(u)=\lambda u$، ومنه فإن

$(f-\lambda I)(u)=0$، وبما أن $(f-\lambda I)$ مؤثر ناظمي. إذاً يكون

$(f-\lambda I)^*(u)=0$، وذلك حسب النتيجة (6−1). عندئذ $f^*(u)=\bar{\lambda}u$.

مبرهنة (6−2):

ليكن f مؤثراًناظمياًعلى الفضاء الواحدي المنتهي البعد V. عندئذ يوجد أساس متعامد منظم مؤلف من المتجهات الذاتية للمؤثر f.

البرهان:

نستخدمطريقة الاستقراء الرياضي على بعد الفضاء V. إذا كان $\dim V=1$ فإن المبرهنة صحيحة. نفرض أن $\dim V=n>1$. بما أن الفضاء V واحدي. عندئذ توجد قيمة ذاتية واحدة على الأقل للمؤثر f، وبالتالي يوجد متجه ذاتي يقابل تلك القيمة الذاتية.

ليكن U فضاءً جزئياً مولداً بالمتجه u، وليكن u_1 متجه الوحدة له، وبالتالي فإن الفضاء

الجزئي لامتغير بالنسبة للمؤثر f، وكذلك فإن u يكون متجهاً ذاتياً للمؤثر f^*، وذلك

حسب المثال (6–4). ومنه فإن U يكون لامتغيراً بالنسبة للمؤثر f^*. إذاً $U^{\perp}$ لامتغير

بالنسبة للمؤثر $f = f^{**}$، ويكون مقصوره على $U^{\perp}$ ناظمياً. لدينا $\dim U^{\perp} = n-1$
، وبالتالي باستخدام الاستقراء الرياضي نجد أنه يوجد أساس متعامد منظم $\{u_2,...,u_n\}$

للفضاء $U^{\perp}$ مكون من المتجهات الذاتية للمؤثر $f|_{U^{\perp}}$، وبالتالي للمؤثر f. بما أن

$\langle u_1, u_i \rangle = 0$ لكل $i = 2,...,n$، وذلك لأن $u_i \in U^{\perp}$، وبالتالي فإن

$\{u_1,u_2,...,u_n\}$ أساس متعامد منظم مكون من المتجهات الذاتية للفضاء V.

مثال (6–5):

بين فيما إذا كانت المصفوفات التالية ناظمية أم لا حيث:

$$A = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ i & 3-2i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

الحل: نحسب

$$A.A^* = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} +1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^*.A = \begin{pmatrix} +1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 14 \end{pmatrix}$$

وبما أن $A.A^* = A^*.A$ فإن A تكون ناظمية

– نحسب:

$$B.B^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^*.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

وبما أن $B.B^* \neq B^*.B$ فإن B ليست ناظمية

– نحسب

$$C.C^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

$$C^*.C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

وبما أن $C.C^* = C^*.C$ فإن C مصفوفة ناظمية

مثال (6–6):

ليكن المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي $\mathbb{C}^3$ معطى بدلالة المصفوفة في الأساس القانوني الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) أثبت أن f ناظمي.

2) أوجد مصفوفة متعامدة P تحقق العلاقة

$$P^T AP = D$$

الحل:

1)بما أن $A = A^*$ فإن المصفوفة A ناظمية، وبالتالي المؤثر f ناظمي.

2) نلاحظ أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

وتكون المتجهات الذاتية المقابلة

$$u_1 = (i ,1,1),\ u_2 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$u_2 = \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

وتكون متجهات الوحدة

$$u_1' = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i ,1,1)$$

$$u_2' = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$u_3' = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

وبالتالي:

$$P=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} i & \frac{\sqrt{3}-i}{2} & \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

ويكون:

$$P^T AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

تمارين محلولة

1– ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. إذا كان $\langle f(u),v\rangle = 0$ لكل $u,v \in V$. فأثبت أن $f = 0$

الحل:

نفرض أن $f(u) = v$ عندئذ يكون $\langle f(u),f(u)\rangle = 0$ ومنه فإن $f(u) = 0$ لكل $u \in V$. إذاً $f = 0$.

2– ليكن f مؤثراً خطياً متناظراً (هرميتياً)على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V. وليكن $f^2 = 0$. عندئذ أثبت أن $f = 0$

الحل:

لدينا

$$\|f(v)\|^2 = \langle f(v),f(v)\rangle = \langle v,f^2(v)\rangle$$
$$= \langle v,0v\rangle = \langle v,0\rangle = 0,\ \ \forall v \in V$$

وبالتالي $\|f(v)\| = 0$ ومنه $f(v) = 0$ لكل $v \in V$. إذاً $f = 0$.

3- بين أن المؤثرين f^*f و ff^* متناظران (هرميتيان) لأي مؤثر على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V.

الحل:

لدينا

$$(ff^*)^* = f^{**}f^* = ff^*$$

$$(f^*f)^* = f^*f^{**} = f^*f$$

4– عين f^* المؤثر القرين للمؤثر f والمعرف بالشكل التالي:

$$f(x,y,z)=(x+y-z,2x,x-z)$$

الحل:

إن مصفوفة المؤثر f بالنسبة لأساس نظامي في R^3 هي

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$[A(f)]^* = [A(f)]^T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix} = A(f^*)$$

ومنه يكون:

$$f^*(x,y,z)=(x+2y+z,\ x,\ -x-z)$$

5– عين f^* المؤثر القرين للمؤثر الخطي f على $\mathbb{C}^2$ حيث:

$$f(x,y)=(x-iy,\ ix+y)$$

الحل:

$$\forall\ u=(u_1,u_2)\ ,\ v=(v_1,v_2)\in\mathbb{C}^2$$

فإن: $\langle f(u),v\rangle = \langle (u_1-iu_2,\ iu_1+u_2),(v_1,v_2)\rangle$

$$=(u_1-iu_2)\overline{v_1}+(iu_1+u_2)\overline{v_2}$$

$$=u_1(\overline{v_1}+i\overline{v_2})+u_2(-i\overline{v_1}+\overline{v_2})$$

$$=\langle (u_1,u_2),(v_1-iv_2,\ v_2+iv_1)\rangle$$

وبوضع: $f^*(v)=f^*(v_1,v_2)=(v_1-iv_2,\ v_2+iv_1)$

نحصل على: $\langle f(u),v\rangle = \langle u,f^*(v)\rangle$

وبملاحظة أن:f^* مؤثر على $\mathbb{C}^2$فإن المؤثر القرين للمؤثر f هو:

وهذا يعني أن fهيرميتي لأن: $A = A^*$.

6–ليكن f المؤثر الخطي على $\mathbb{C}^3$ المعرف بالعلاقة:

$$f(x, y, z) = (ix + (2+3i)y,\ 3x + (3-i)z,\ (2-5i)y + iz)$$

والمطلوب: أوجد $f^*(x, y, z)$

الحل:

لنوجد أولاً المصفوفة A التي تمثل المؤثر f بالنسبة لأساس نظامي في الفضاء $\mathbb{C}^3$وهي:

$$A = \begin{bmatrix} i & 2+3i & 0 \\ 3 & 0 & 3-i \\ 0 & 2-5i & i \end{bmatrix}$$

ولنوجد المصفوفة A^* (وهي منقول مرافق المصفوفة A)

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & 3 & 0 \\ 2-3i & 0 & 2+5i \\ 0 & 3+i & -i \end{bmatrix}$$

وبذلك يكون:

$$f^*(x, y, z) = (-ix+3y,\ (2-3i)x+(2+5i)z,\ (3+i)y - iz)$$

7–لتكن المصفوفة الحقيقية المتناظرة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب :أوجدمصفوفة متعامدة حقيقية P بحيث تكون $P^T AP$ مصفوفة قطرية.

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمصفوفة A تعطى بالشكل الآتي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -3\\ -3 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2-2\lambda-24=(\lambda-6)(\lambda+4)$$

وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=-4$. نعوض في المعادلة المصفوفية $[\lambda I-A]X=0$ بـ $\lambda_1=6$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على النظام المتجانس التالي:

$$x-3y=0$$

$$-3x+9y=0$$

وبالتالي فإن المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=6$ هو:

$$v_1=(3,1)$$

نوجد متجه الوحدة لـ v_1:

$$u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

مرة أخرى نعوض في المعادلة المصفوفية $[\lambda I-A]X=0$ بـ $\lambda_2=-4$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix}-9 & -3\\ -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

ومنه يكون النظام المتجانس التالي:

$$-9x-3y=0$$

$$-3x-y=0$$

وبالتالي فإن المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -4$ له الشكل:

$$v_2 = (-1, 3)$$

نوجد متجه الوحدة لـ v_2:

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

عندئذ تكزن المصفوفة P معطاة بالشكل التالي:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

8- لتكن المصفوفة الحقيقية المتناظرة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -7 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & \frac{-5}{7} \end{bmatrix}$$

والمطلوب أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^T A P$ مصفوفة قطرية.

الحل:

إن كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمصفوفة A تعطى بالشكل التالي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 7 & -3 \\ 7 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda + 5/7 \end{vmatrix}$$

$$= 7\lambda^3 - 65\lambda^2 + 344\lambda - 372 = (\lambda + 2)^2 \left(\lambda - \frac{93}{3}\right)$$

وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A : $\lambda_1 = \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = \frac{93}{7}$. نعوض في المعادلة المصفوفية $[\lambda I - A]X = 0$ بـ $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix} -7 & 7 & -3 \\ 7 & -7 & 3 \\ -3 & 3 & -9/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على النظام المتجانس التالي:

$$-7x + 7y - 3z = 0$$

$$7x - 7y + 3z = 0$$

$$-3x + 3y - \frac{9}{7}z = 0$$

وبالتالي فإن المتجهين الذاتيين المقابلين للقيمة الذاتية المضاعفة $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ هما:

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (3,-3,-14)$$

نعوض متجهي الوحدة لـ v_1 و v_2:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{214}}, \frac{-3}{\sqrt{214}}, \frac{-14}{\sqrt{214}}\right)$$

نعوض مرة أخرى في المعادلة المصفوفية $[\lambda I - A]X = 0$ بـ $\lambda = \frac{93}{7}$ فنجد أن:

$$\begin{bmatrix} \frac{44}{7} & 7 & -3 \\ 7 & \frac{44}{7} & 3 \\ -3 & 3 & 98/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون النظام المتجانس التالي:

$$\frac{44}{7}x + 7y - 3z = 0$$

$$7x + \frac{44}{7}y + 3z = 0$$

$$-3x + 3y + \frac{98}{7}z = 0$$

وبالتالي فإن المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = \frac{93}{7}$ هو:

$$v_3 = (7, -7, 3)$$

نوجد متجه الوحدة لـ v_3:

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(\frac{7}{\sqrt{107}}, \frac{-7}{\sqrt{107}}, \frac{3}{\sqrt{107}} \right)$$

عندئذ تكون المصفوفة P معطاة بالشكل التالي:

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{214}} & \frac{7}{\sqrt{107}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{214}} & \frac{-7}{\sqrt{107}}\\ 0 & \frac{14}{\sqrt{214}} & \frac{3}{\sqrt{107}}\end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$P^T AP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{93}{7}\end{bmatrix}$$

9- أثبت أن أي مؤثر خطي f على الفضاء الإقليدي (الواحدي) V يكون مجموعاً لمؤثرين أحدهما متناظر والآخر متناظر متخالف.

الحل:

نفرض أن $g=\frac{1}{2}\left(f+f^*\right)$ و $h=\frac{1}{2}\left(f^*-f\right)$ وبالتالي $f=g+h$ ومنه:

$$g^*=\left(\frac{1}{2}\left(f^*+f\right)\right)^*=\frac{1}{2}\left(f^{**}+f^*\right)=\frac{1}{2}\left(f^*+f\right)=g$$

$$h^*=\left(\frac{1}{2}\left(f^*-f\right)\right)^*=\frac{1}{2}\left(f^{**}-f^*\right)=\frac{-1}{2}\left(f^*-f\right)=-h$$

أي أن g متناظر و h متناظر متخالف.

10- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^2$، حيث:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y,x-y)$$

أثبت أن المؤثر f متعامد على $\mathbb{R}^2$.

الحل:

نعرف الجداء الداخلي على $\mathbb{R}^2$ بالشكل:

$$\langle u,v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 ; u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$$

لدينا:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1, x_1-y_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_2, x_2-y_2) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left((x_1+y_1)(x_2+y_2)+(x_1-y_1)(x_2-y_2)\right)$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 = \langle u,v \rangle$$

11− ليكن $f(x,y)=(x-iy, iy)$ مؤثراً خطياً على $\mathbb{C}^2$ اكتب المؤثّر الخطي f على الشكل:

$f=M+N$ حيث M مؤثر هيرميتي و N مؤثر هيرميتي متخالف

الحل:

نعلم وحسب مبرهنة سابقة أنه يمكن كتابة f بالشكل:

$$f = ½(f+f^*) + ½(f-f^*) \;;$$

$$M = ½(f+f^*), N = ½(f-f^*)$$

ولتكن A مصفوفة f بالنسبة لأساس قانوني في $\mathbb{C}^2$ فإن كلاً من M, N

بالنسبة لهذا الأساس هي A_N, A_M ستكون:

$$A_M = ½(A + A^*), A_N = ½(A - A^*)$$

ولكن :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad , A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$A_M = ½ (A+ A^*) = ½\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_N = ½ (A- A^*) = ½\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 2i \end{pmatrix}$$

وأخيراً يكون لدينا:

$$M (x ,y) = ½ (2x – iy , ix) ,$$

$$N (x , y)= ½ (-iy, -ix +2iy)$$

12− أوجد مصفوفة متعامدة A ، إذا علمت أن سطرها الأول $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

الحل:

نوجد متجهاً غير صفري $u_2 = (x , y)$ يتعامد مع u_1 ، أي أن

$$0 = \langle u_1, u_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} y \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow u_2 = (1, -2)$$

نوجد قيمة متجه الوحدة لـ u_2 فنجد أن:

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}} \right)$$

وتكون المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

13− أوجد مؤثراً متعامداً على الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ لا يتطابق مع المؤثر المطابق.

الحل:

نوجد المصفوفة المتعامدة في الفضاء $\mathbb{R}^3$. ليكن المتجه غير الصفري

$u_1(2,1,2) \in \mathbb{R}^3$ نوجد متجه الوحدة لـ u_1 :

$$u_1' = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

نوجد متجهاً غير صفري $u_2 = (x_1, y_1, z_1)$ يتعامد مع u_1، أي أن:

$$0 = \langle u_1, u_2 \rangle = 2x_1 + y_1 + 2z_1 \Rightarrow u_2 = (1, 0, -1)$$

نوجد قيمة متجه الوحدة لـ u_2 :

$$u_2' = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

كذلك نوجد متجهاً غير صفري $u_3 = (x_2, y_2, z_2)$ يتعامد مع u_1 و u_2، أي أن:

$$0 = \langle u_1, u_3 \rangle = 2x_2 + y_2 + 2z_2 = 0$$

$$0 = \langle u_2, u_3 \rangle = x_2 - z_2 = 0$$

ومنه نجد أن $u_3 = (1, -4, 1)$. نوجد متجه الوحدة لـ u_3 :

$$u_3' = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$$

وتكون المصفوفة المتعامدة

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

14–لتكن A مصفوفة حقيقية معرفة موجبة ولتكن C مصفوفة متعامدة. أثبت أن المصفوفة $C^T AC = C^{-1}AC$ معرفة موجبة.

الحل:

من تعريف المصفوفة A لدينا

$$A = B^T B,$$

حيث B مصفوفة عكوسة، وبالتالي:

$$C^T AC = C^{-1}\left(B^T B\right)C = \left(BC\right)^T \left(BC\right),$$

حيث BC مصفوفة عكوسة. إذاً $C^T AC$ معرفة موجبة.

15– لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1) هل A معرفة موجبة؟

2) أوجد مصفوفة متعامدة C، بحيث تكون $C^T AC$ قطرية.

3) أوجد الجذر التربيعي B للمصفوفة $C^T AC$.

4) أثبت أن CBC^T جذر تربيعي للمصفوفة A.

5) أوجد الجذر التربيعي الموجب للمصفوفة A.

الحل:

1) بما أن $a = 1$ ، $d = 4$ ، $|A| = 6$ أعداد موجبة فإن A مصفوفة معرفة موجبة.

2) نوجد كثيرة الحدود المميزة $\Delta(\lambda)$ للمصفوفة A :

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

وبالتالي فإن $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_3 = 3$ هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A .

نعـوض $\lambda_1 = 2$ فـي المعادلـة المصـفوفية $[\lambda I - A]X = 0$ فنحصـل علـى النظـام المتجانس:

$$2x - 2y = 0$$
$$x - y = 0$$

بحل النظام نجد أن $u_2 = (1,1)$. نوجد متجه الوحدة:

$$u_2{}' = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

نأخذ المصفوفة C التي أعمدتها $u_1{}'$ و $u_2{}'$ على الترتيب فنجد أن

$$C = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ويكون $C^T AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3) نأخذ الجذر التربيعي للعناصر القطرية فنجد أن

$$B=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

4) لدينا $D=C^{T}AC=C^{-1}AC$ ومنه $A=CDC^{T}=CDC^{-1}$ وبالتالي:

$$F^{2}=\left(CBC^{T}\right)\left(CBC^{T}\right)=\left(CBC^{-1}\right)\left(CBC^{-1}\right)$$

$$=CB^{2}C^{-1}=CDC^{-1}=A$$

وبما أن F معرفة موجبة. إذاً F هو الجذر التربيعي الموجب للمصفوفة A .

5) إن

$$F=CBC^{T}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{2\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

16– لتكن $A=\begin{bmatrix}2 & i\\ i & 2\end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة فوق $V=M_2(\mathbb{C})$ والمطلوب:

1– تحقق من أن A ناظمية.

2– احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لها.

3– احسب القيم الذاتية والمتجهات لـ A^* وتحقق من أنه إذا كان v متجهاً ذاتياً لـ A مقابل القيمة λ فإن v متجه ذاتي لـ A^* مقابل القيمة الذاتية $\bar{\lambda}$.

الحل:

1- لدينا

$$A.\,A^* = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^*.\,A = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$A.\,A^* = A^*.A \Rightarrow$ والمصفوفة A ناظمية.

2- لدينا الحدودية المميزة لـ A هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -i \\ -i & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2-(-1) = \lambda^2-4\lambda+4+1$$
$$= \lambda^2-4\lambda+5$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2+i\ ,\ \lambda_2 = 2-i$

أما المتجهات الذاتية المقابلة لها فهي:

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 2+i$ المتجه الذاتي: $v_1 = (1,1)$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_2 = 2-i$ المتجه الذاتي: $v_2 = (1,-1)$

3- $A^* = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Delta(\lambda) = (\lambda-2)^2+1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm i$

ونجد أن القيمة الذاتية $\lambda_1 = 2+i$ تقابل المتجه الذاتي $v_1 = (1,1)$

القيمة الذاتية $\lambda_2 = 2-i$ تقابل المتجه الذاتي $v_2 = (1,-1)$

ونلاحظ أن $v_1 = (1,1)$ متجه ذاتي لـ A مقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2+i$ وهو أيضاً متجه ذاتي لـ A^* مقابل للقيمة الذاتية $\overline{\lambda_1} = 2-i$

وكذلك فإن :

$v_2 = (1,-1)$ متجه ذاتي لـ A مقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 2-i$ وهو أيضاً متجه ذاتي لـ A^* مقابل للقيمة الذاتية $\overline{\lambda_2} = 2+i$

17–ليكن المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي $\mathbb{C}^3$ معطى بدلالة المصفوفة في الأساس القانوني التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ i & 0 & 1 \\ -i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1) أثبت أن f ناظمي.

2) أوجد مصفوفة متعامدة P تحقق العلاقة

$$P^T AP=D$$

الحل:

لدينا

$$A^*=\begin{bmatrix} 0 & -i & i \\ -i & 0 & -1 \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA^*=A^*A=\begin{bmatrix} 2 & -i & -i \\ i & 2 & -1 \\ i & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة A ناظمية وبالتالي فإن f ناظمي.

2) نلاحظ أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي:

$$\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=i\sqrt{3},\ \lambda_3=-i\sqrt{3}$$

وتكون المتجهات الذاتية المقابلة:

$$u_1=(i,1,1),\ u_2=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\ u_3=\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

وتكون متجهات الوحدة:

$$u_1'=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(i,1,1)$$

$$u_2'=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$u_3'=\frac{u_3}{\|u_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

وبالتالي فإن:

$$P=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} i & \frac{\sqrt{3}-i}{2} & \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

ويكون:

$$P^T A P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد قرين المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5i\\ i & -2i\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}3-7i & 18 & 4+i\\ -7i & 6-i & 2-3i\\ 8+i & 7+9i & 6+3i\end{bmatrix}$$

2- أوجد المؤثر القرين لكل من المؤثرات الآتية:

$$f_1:R^3\to R^3\ ;f_1(x,y,z)=\\(3x+4y-5z\ ,2x-6y+7z\ ,5x-9y+z)$$

$$f_2:C^3\to C^3\ ;f_2(x,y,z)=\\(2x+(1-i)y\ ,(3+2i)x-4iz\ ,2ix+(4-3i)y-3z)$$

$$f_3:R^3\to R^3\ ;f_3(x,y,z)=(x+2y\ ,3x-4z\ ,y),$$

$$f_4:R^3\to R^3\ ;f_4(x,y,z)=(x+y-z\ ,2x\ ,x-z).$$

3- أثبت أن $I^*=I$ وكذلك أثبت أن $0^*=0$.

4- لتكن A مصفوفة نظامية . والمطلوب أثبت أن

$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

5- ليكن f مؤثراً تناظرياً. والمطلوب:

أ- بين أن كثيرة الحدود المميزة لـ f تكون جداءً لكثيرات حدود خطية (على $\mathbb{R}$).

ب- f لايملك متجهات ذاتية صفرية.

6- بين أي المصفوفات الآتية ناظمية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & 2+i\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & i\\ i & 2\end{bmatrix}.$$

7- لنفرض ان A هي مصفوفة المؤثّر الخطي f على الفضاء الواحدي $\mathbb{C}^3$

بالنسبة لأساس نظامي حيث : $A=\begin{pmatrix}2+i & -1 & 0\\ -1 & 1+i & 1\\ 0 & 1 & 2+i\end{pmatrix}$

والمطلوب :

أ- اثبت أن المصفوفة A ناظميّة . ثمّ اوجد القيم الذاتية للمؤثّر f .

ت- عيّن المتجهات الناظميّة- المتعامد الذاتيّة للمؤثّر f .

8- أعد التمرين السابق من أجل المصفوفتين :

$$A=\begin{pmatrix}0 & i & i\\ -i & 0 & 1\\ -i & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & i & -i\\ i & 0 & 1\\ -i & -1 & 0\end{pmatrix}$$

9- لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ والمطلوب :

1- هل A معرّفة موجبة؟

2- أوجد مصفوفة متعامدة C ،بحيث تكون C^TBC مصفوفة قطرية .

3- أوجد الجذر التربيعي الموجب للمصفوفة A .

4- أثبت أن $C\ BC^T$ هو الجذر التربيعي للمصفوفة A .

5- أوجد الجذر التربيعي الموجب للمصفوفة A .

10-لتكن $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة فوق $M_{2\times2}(\mathbb{C})$و المطلوب:

1- تحقق أن A ناظميّة .

2- احسب القيم الذاتيّة والمتجهات الذاتية لها .

11-أوجد المصفوفات الواحدية (العمودية) التي يكون سطرها الأول

$$\left[\frac{2}{\sqrt{13}} \quad \frac{3}{\sqrt{13}}\right], \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

12–بين المصفوفات الموجبة (المعرفة الموجبة) الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

13–لتكن المصفوفات المتناظرة الآتية: والمطلوب أوجد مصفوفة عمودية P ، بحيث تكون $P^T AP$ مصفوفة قطرية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix},.$$

14–أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية حيث :

$$A=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix}$$

15– لتكن لدينا

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2+3i & 2i\\ 4-5i & -3 & 7+3i\\ -2i & 7-3i & 10\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2i & 2+3i & 5i\\ -2+3i & -4i & -1-3i\\ 5i & 1-3i & i\end{pmatrix}$$

والمطلوب :

1– أثبت أن المصفوفة A هرميتية ، بينما المصفوفة B هرميتية متخالفة.

2–أوجد القيم الذاتيّة للمصفوفة A وتحقق أنها أعداد حقيقية ثمّ احسب المتجهات الذاتية القابلة لها.

3– أثبت أن القيم الذاتية للمصفوفة B هي أعداد تخيّلية بحته ، أو أصفار، ثمّ أوجد المتجهات الذاتية المقابلة لها.

المراجع

[1] Axler S. Linear algebra, Don right, second edition, Springer, 1997.

[2] Beezer R.A. A first course in linear algebra, univ. Of Puget Sound , 2006.

[3] T.S. , Robertson E.F. Further linear algebra, Springer, 2006.Blyth

[4] Connel E.H. Elements of abstract and linear algebra , univ. Miami , Florida ,USA 2004.

[5] Hefferon J. [5] , Michaels College , USA , 2001.

[6] Howard A. , Chris R. Elementary linear algebra John Wiley & Sons Inc, 2005.

[7] Leon S.J. Linear algebra with applications, six edition, Hali, Inc, 2002.

[8] Messer R. Linear algebra, Harper Coll. Pub. 1994.

[9] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra, Copyright , SIAM , 2000.

[10] Nicholson W. K. Linear algebra with applications, third edition, Pws pub. Comp. , 1995.

[11] Robinson D. J.S. A course in linear algebra with applications, Library of congress catalog. in pub. Data 1995.

[12] SharipovR. A. Course of linear algebra and multidimensional geometry, Bashkir univ. ,2004.

[13] Stoll M. Linear algebra I, Harper Coll. Pub. 2006.

[14] Stoll M. Linear algebra I, Harper Coll. Pub. 2007.

[15] Strang G. Linear algebra and its applications, Thompson Learning , 2010

[16] أحمد الخلف،الجبر الخطي 2، منشورات جامعة البعث، 1993.

[17] أحمد الخلف، عبد الباسط الخطيب الجبر الخطي -2- منشورات جامعة البعث، 2010.

[18] إلهام الحمصي، جبر4 (الجبر الخطي 2)، منشورات جامعة دمشق، 1988.

[19] سيمور ليبشتز، الجبر الخطي، سلسلة ملخصات شوم، دار ماكجروهيل للنشر 1989. لندن.

[20] صفوان عويرة ،غسان نعمي ،الجبر الخطي -2- منشورات جامعة البعث، 2006.

[21] معروف السمحان ،علي السيحيباني ، فوزي الذكير الجبر الخطي وتطبيقاته منشورات جامعة الملك سعود2001.

دليل المصطلحات العلمية

عربي – انكليزي

انكليزي	**عربي**
Adjoint	مرافق
Adjoint operator	المؤثر المرافق
Algebraic multiplicity	التعدد الجبري
Annihilator	العادم (المفني)
Antisymmetric	متناظرة متخالفة
B	
Basis	الأساس (القاعدة)
Bilinear forms	أشكال ثنائية الخطية
Bilinear operator	مؤثر ثنائي الخطية
Bilinear polynomial	كثيرة حدود ثنائية الخطية
Bilinear matrices	مصفوفات ثنائية الخطية
Block matrices	مصفوفات القوالب أو الخلايا
C	
Canonical form	شكل(صيغة) قانونية
Canonical	قانوني
Canonical-Bunyakovsky-inequality	متباينة كوشي-- بونياكوفسكي
Cayley-Hamilton-theorem	نظرية كيلي – هاملتون
Change of basis	تغيير الأساس
Characteristic value	القيمة المميزة
Characteristic vector	المتجه المميز
Characteristic matrix	المصفوفة المميزة
Characteristic equation	المعادلة المميزة
Characteristic polynomial	كثيرة الحدود المميزة
Class	صف
Classification of quadratic form	تصنيف الأشكال التربيعية
Column vector	متجه العمود
Complement	متمم
Coordinates	مركبات
Coordinate vector	متجه المركبة

D	
Determinant	محددة
Diagonal	قطر
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Diagonalizable	قابلة للتمثيل القطري
Dimension	البعد
Distinct value	قيم مختلفة
Divided	يقبل القسمة على
Dual	ثنوي
Dual space	الفضاء الثنوي
Dual basis	الأساسالثنوي
E	
Eigen-value	القيم الذاتية
Eigen Vectors	المتجهات الذاتية
Eigen space	الفضاء الذاتي
Euclidean space	الفضاء الاقليدي
F	
Field	حقل
Finite	منته
Finite space	فضاء منتهي
Frobenius's form	شكل (صيغة)فرابينوس
G	
Generated	متولد
Geometric multiplicity	التعدد الهندسي
Gram-schmidtorthogonalization	طريقة جرام – شميت للتعامد
H	
Hermitian	هرميتي
Hermitian operator	مؤثر هرميتي
Homomorphism	تشاكل
Homogeneous equation	معادلة متجانسة
I	
Identity mapping	التطبيق المطابق
Image	صورة
Index Inertia	دليل القصور
	الجداء الداخلي

Inner product	فضاء الجداء الداخلي
Inner product space	
	الثابت (اللا متغير)
Invariant	فضاء ثابت (لا متغير)
Invariant space	مصفوفات قابلة للقلب (نظامية)
Invertible matrecs	المؤثرات القابلة للقلب (نظامية)
Invertible operators	غير قابلة للاختصار (خزول)
Irreducible	متماثلة
Isomorphic	
J	طريقة جاكوبي
Jacobi's method	مصفوفة جوردان
Jordan matrix	شكل (صيغة) جوردان
Jordan's form	
K	نواة
Kernel	
L	طريقة لاغرانج
Lagrang's method	قانون القصور الذاتي
Law of inertia	خطي
Linear	جبر خطي
Linear algebra	معادلات خطية
Linear equations	التركيب الخطي
Linear combination	مستقلة خطيا
Linear independent	مرتبطة خطيا
Linear dependent	مؤثر خطي
Linear operator	الفضاءات الخطية
Linear spaces	التطبيقات الخطية
Linear mappings	الدوال الخطية
Linear functionals	
M	التطبيقات
Mappings	التمثيل المصفوفي
Matrix representation	كثيرة الحدود الصغرى
Minimum polynomial	التعددية
Multiplicity	شكل متعدد الخطية
Multilinear form	

N	عديمة القوة
Nilpotent	مؤثر عديم القوة
Nilpotent operator	
	نظامي (غير شاذ)
Non singular	نظيم (طويلة)
Norm	ناظمي
Normalized	مؤثر ناظمي
Normal operator	
O	عملية
Operation	ترتيب
Order	التعامد
Orthognal	المتمم العمودي
Orthognal complement	مجموعة متعامدة
Orthognal set	مجموعة متعامدة منظمة
Orthonormal set	أساس متعامد منظم
Orthonormal basis	مصفوفة عمودية
Orthogonal matrix	
P	شكل قطبي
Polar form	كثيرة حدود
Polynomial	إسقاط
Projection	القيمة الذاتية
Proper value	المتجه الذاتي
Proper vector	
Q	تربيعي
Quadratic	شكل تربيعي
Quadratic form	شكل تربيعي هرميتي
Quadratic Hermitian form	
R	مرتبة
Rank	مرتبة مصفوفة
Rank of a matrix	مرتبة الشكل التربيعي
Rank of quadratic form	شكل الصف
Row vector	
S	الجداء الخارجي
Scalar product	فضاء ثنوي ثاني
Second dual space	شكل ثلاث أنصاف الخطية

Sesquilinear form	مجموعة
Set	إمضاء مصفوفة
Signature of a matrix	تشابه
Similarity	مصفوفات متشابهة
Similar matrices	غير نظامي (شاذ)
Singular	شكل ثنائي الخطية متناظر متخالف
Skewsymmetric bilinear form	مصفوفة مربعة
Squar matrix	فضاء
Space	متولد
Spanned	طيف
Spectral	فضاء جزئي
Subspace	مجموع
Sum	مبدأ سيلفستر
Sylvester's criterion	شكل ثنائي الخطية المتناظر
Symmetric bilinear form	مصفوفات متناظرة
Symmetric matrices	مجموعة معادلات خطية
System of linear equations	
T	أثر مصفوفة
Trace of matrix	التعدي
Transition	مصفوفة التعدي
Transition matric	منقول
Transpose	منقول مؤثر خطي
Transpose of linear operator	شكل (صيغة) مثلثي
Triangular form	
U	واحدي
Unitary	مصفوفات واحدية
Unitary matrices	فضاء واحدي
Unitary space	مؤثر واحدي
Unitary operator	
V	متجه
Vector	فضاء متجهات
Vector space	